数学名著译丛

线性算子理论

〔波兰〕S. Banach　著

金成桴　译

科学出版社

数学名著译丛

线性算子理论

〔波兰〕S. Banach 著
金成桴 译

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是著名波兰数学家 S. Banach 的经典著作 *Théorie des Opérations Linéaires* 的中译本，并包括 A. Pełczyński 和 Cz. Bessaga 的综合报告：Banach 空间现代理论的某些方面. 主要介绍 Banach 空间中的线性算子理论及相关问题，它是泛函分析的重要组成部分. 全书共分 12 章，包括引言、附录和附注以及综合报告. 主要内容有：距离空间、一般向量空间、Banach 空间和 F 空间、线性算子、线性泛函与线性泛函方程、双正交序列与弱收敛序列、等距与同构理论、线性维数，以及 Banach 空间现代理论中的 Banach 空间局部性质、逼近性质与基、Banach 空间类中的 Hilbert 空间表征等.

本书可作为数学专业泛函分析方向研究生、教师的参考书，也可供相关领域的科研工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性算子理论/〔波兰〕S. Banach 著；金成桴译. —北京：科学出版社，2011
(数学名著译丛)
ISBN 978-7-03-030596-1

I. ①线… II. ①S.… ②金… III. ①线性算子理论 IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 044938 号

责任编辑：赵彦超 杨欣河/责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬/封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷
排版制作：科学出版社编务公司
科学出版社发行 各地新华书店经销
*

2011 年 4 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2011 年 4 月第一次印刷 印张：18 1/4
印数：1—2 500 字数：352 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

译 者 序

泛函分析创始人之一、著名波兰数学家 Stefan Banach 的经典名著 *Théorie des Opérations Linéaires* 出版于 20 世纪 30 年代. 也许由于第二次世界大战的影响，该书的法文版直到 1955 年才由美国的 Chelsea 出版公司出版，1978 年出版了第二版，1987 年出版了由 F. Jellett 翻译的英文版(荷兰 North-Holland 出版公司出版). 中译本主要根据原版并参考英译本翻译而成.

鉴于 Banach 时代的数学符号、术语与现代用法不尽相同，中译本尽量采用现代术语，例如全连续算子(opérations totalement continues et associées) 就译为紧算子. 另外，由于泛函分析是一门涉及分析、拓扑与代数等的综合性学科，因此原书有些数学符号按现代数学习惯也作了更改. 还有，Banach 在序言中明确说明书中定理一般不给出来源，但事实上书中许多定理，特别是不属于 Banach 本人的大部分定理都在脚注和书后面的附注中给出来历，这是考虑到尊重原著，同时也深深感到一个数学理论的创立不易，因此，尽管英文版删掉了原书法文版中的许多脚注，中译本仍按原著把它们加上. 当然，其中所引的许多古典文献很可能在国内不易找到，尤其是除了英文以外的许多其他语种的文献. 这也是那个年代和这之前数学在欧洲很发达，比其他地区有着明显优势的真实反映.

本书主要介绍 Banach 空间中的线性算子理论. 它的一个特点是富有启发性，通过本书的阅读，读者从中可初步领略到一个数学理论的建立过程：从总结前人的工作到提出新问题、新方法再到给出新理论，并不断提出一定质量的问题，进行及时总结和提高. 但由于作者的叙述比较简练，本书对初学者可能会有些困难. 好在现在已经有不少泛函分析的优秀教材，读者可结合阅读. 本书附录主要介绍 Banach 空间中的弱收敛性. 附注是对前面各章内容的说明，给出定理的来龙去脉，并提出许多富有启发性的问题，有些至今还没有完全解决，最后的表格清楚说明了同构、等距和等价这三个不变量在不同空间中的存在性. 由于其中一些在本书出版之前还未解决的问题现在已经解决了，因此我们按英译本作了改动. 最后一部分是 A. Pelczyński 和 Cz. Bessaga 写的综合报告 “Banach 空间现代理论的某些方面”，主要介绍有关理论在本书出版以后的最新进展，把它放入本书是为了让读者对 Banach 空间算子理论从建立到发展有个比较全面的了解. 书后 330 多篇文献和 70 多篇附加文献可供研究生和有关学者参考.

很高兴得知科学出版社准备出版一系列优秀的数学经典名著，这对我国数学

的发展无疑有很大帮助. 能够为此尽一份微薄之力, 我深感荣幸. 但限于水平, 书中错误和不妥之处在所难免, 敬请读者批评指正.

最后, 感谢科学出版社责任编辑对本书翻译出版整个过程的大力支持和帮助, 也感谢我妻子何燕俐对我工作的支持与关心.

金成桴

2010 年 4 月于 Amstelveen

前　言

由 V. Volterra 创立的算子理论，是将定义在无穷维空间中的函数作为研究对象. 本质上，这个理论已经渗透到几个非常重要的数学领域：只需回忆积分方程理论和变分学作为一般算子理论主要领域的特殊情形就够了. 在这个理论中，经典的数学方法与近代方法看来非常有效和十分和谐地结合在一起. 通常它也可使得集合论或拓扑学的一些定理有不易预料的全面解释. 例如，由 Birkhoff 和 Kellogg 所证明的算子理论，有关不动点的拓扑定理可翻译为微分方程解的存在性的古典定理. 若不借助算子理论的帮助，数学中的有些重要部分就不能得到深入的理解. 当代例子有：实变函数理论、积分方程以及变分学等.

因此，这个理论应该得到赞赏. 在它的讨论范围内(即使不考虑它的许多应用)因其漂亮的价值引起越来越多的数学家的兴趣. J. Hadamard 认为，作为近代数学研究最有效方法之一，算子理论的出现并不奇怪.

本书的内容包括算子代数的基础，即专注于所谓线性算子的研究，它对应于线性形式 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 的代数研究.

线性算子的概念可定义如下：设 E 和 E_1 是两个抽象空间，每个都赋予相应的加法运算和零元素. 设 $y=U(x)$ 是一个函数(算子，变换)，在它的作用下，E 中的每个元素 x 对应于 E_1 的元素 y (在特殊情形，E_1 是实数空间，这个函数也就是熟知的泛函). 若对 E 的任何 x_1 和 x_2 有 $U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2)$，则 U 称为加性算子. 此外，如果 E 和 E_1 是距离空间，就说对空间每对元素之间的距离已被定义，那么就可考虑连续算子 U. 具有加性的连续算子称为线性的.

本书主要考虑定义在某类称为 B 空间(即 Banach 空间——译者注)的一般空间中的线性算子的结果. 例如，连续函数空间、p 次方可和函数空间以及 Hilbert 空间等.

同时也给出一般定理在不同数学领域中的解释，即给出它在群论、微分方程、积分方程、无穷多个未知数的方程组、实变函数、求和方法、正交级数等中的说明. 我们将看到某些定理在这些不同领域内给出的结果. 譬如，关于同时在一般测度问题、矩问题和无穷多个未知数的线性方程组解的存在性问题中的加性泛函的扩张定理.

在本书的前面，将给出这个理论在一般集合论的主要方法和代数工具中的几个新应用. 另外，在本书其他章里还可找到一些新的一般定理. 特别，在最后两章

和附录中包括了以前没有发表过的一些结果，它们组成 Banach 空间关于线性变换不变性研究的概要. 同时，第 12 章包括线性维数性质的定义和分析，它在这些空间中的作用类似于通常维数在 Euclid 空间中的作用.

正文中没有考虑的空间的结果和问题，在本书末尾的附注中作了简短的介绍，有些进一步的文献也在那里给出. 一般，除了在引言或者附注中，本书并不指出定理的来源，因为我认为它们太简单或是第一次在这里给出证明.

对于某些最近出现和继续出现在期刊 *Studia Mathematica* 中的有关工作，主要介绍泛函分析领域及其应用的研究.

我还想写第二本书作为本书的结束，是关于广泛应用拓扑方法的其他类型的泛函算子理论.

最后，我诚挚地感谢所有在工作中帮助我的朋友们，他们把我的波兰文手稿翻译成法文，并在我的工作中给了我有价值的建议. 特别要感谢 H. Auerbach 帮我写了引言以及 S.Mazur 给了我多方面的帮助并帮我起草了最后的附注.

Stefan Banach

1932 年 7 月, Lwów

目 录

译者序

前言

引言 A Lebesgue-Stieltjes 积分 1

A.1 Lebesgue 积分理论中的某些定理 1

A.2 p 次方可和函数的某些不等式 1

A.3 渐近收敛性 3

A.4 平均收敛性 3

A.5 Stieltjes 积分 4

A.6 Lebesgue 定理 6

引言 B 距离空间中的(B)可测集和可测算子 7

B.7 距离空间 7

B.8 距离空间中的集合 9

B.9 距离空间中的映射 11

第 1 章 群 14

1.1 G 空间的定义 14

1.2 子群的性质 14

1.3 加性算子和线性算子 16

1.4 一个奇点的凝聚定理 17

第 2 章 一般向量空间 18

2.1 向量空间的定义与基本性质 18

2.2 加性齐次泛函的扩张 19

2.3 应用：积分，测度，极限概念的推广 20

第 3 章 F 空间 24

3.1 定义与预备知识 24

3.2 齐次算子 25

3.3 元素级数，线性算子的逆 25

3.4 连续不可微函数 29

3.5 偏微分方程解的连续性 30

3.6 无穷多个未知数的线性方程组 32

3.7　空间 s 的应用 …… 35
第 4 章　赋范空间 …… 37
4.1　赋范向量空间和 Banach 空间的定义 …… 37
4.2　线性算子的性质、线性泛函的扩张 …… 37
4.3　基本集和全集 …… 40
4.4　空间 C, L^r, c, l^r, m 以及空间 m 的子空间中的有界线性泛函的一般形式 …… 41
4.5　空间 C, L^r, c, l^r 中的闭序列和完全序列 …… 55
4.6　由函数的线性组合逼近属于 C, L^r 中的函数 …… 56
4.7　矩问题 …… 57
4.8　某些无穷多个未知数的方程组解的存在性条件 …… 58
第 5 章　Banach 空间 …… 60
5.1　Banach 空间中的线性算子 …… 60
5.2　奇点的凝聚原理 …… 62
5.3　Banach 空间的紧性 …… 63
5.4　空间 L^r, c, l^p 的性质 …… 64
5.5　可测函数的 Banach 空间 …… 66
5.6　一些特殊 Banach 空间中的有界线性算子例子 …… 67
5.7　求和法的某些定理 …… 68
第 6 章　紧算子 …… 74
6.1　紧算子 …… 74
6.2　某些特殊空间中的紧算子例子 …… 74
6.3　伴随(共轭)算子 …… 77
6.4　应用：某些特殊空间中的伴随算子例子 …… 79
第 7 章　双正交序列 …… 83
7.1　定义与一般性质 …… 83
7.2　某些特殊空间中的双正交序列 …… 84
7.3　Banach 空间中的基 …… 86
7.4　正交展开理论的某些应用 …… 88
第 8 章　Banach 空间中的线性泛函 …… 90
8.1　预备知识 …… 90
8.2　线性泛函空间的正则闭线性空间 …… 92
8.3　有界线性泛函的超限闭集 …… 92
8.4　有界线性泛函的弱收敛性 …… 96

8.5 可分 Banach 空间中有界线性泛函的弱闭集 ······ 97
8.6 空间 C, L^r, c 和 l^p 中的有界线性泛函的弱收敛性条件 ······ 98
8.7 某些空间中有界集的弱紧性 ······ 102
8.8 定义在有界线性泛函空间中的弱连续线性泛函 ······ 102
第 9 章 弱收敛序列 ······ 104
9.1 定义：元素序列弱收敛性的条件 ······ 104
9.2 空间 C, L^r, c 和 l^p 中序列的弱收敛性 ······ 105
9.3 空间 L^p 和 $l^p(p>1)$中弱收敛与强(范数)收敛之间的关系 ······ 109
9.4 弱完备空间 ······ 110
9.5 关于弱收敛性的一条定理 ······ 112
第 10 章 线性泛函方程 ······ 114
10.1 有界线性算子与它们伴随算子之间的关系 ······ 114
10.2 紧线性算子线性方程的 Riesz 理论 ······ 118
10.3 线性方程的正则值和本征值 ······ 123
10.4 紧算子理论中的 Fredholm 定理 ······ 125
10.5 Fredholm 积分方程 ······ 126
10.6 Volterra 积分方程 ······ 127
10.7 对称积分方程 ······ 127
第 11 章 等距，等价，同构 ······ 129
11.1 等距 ······ 129
11.2 空间 L^2 和 l^2 ······ 129
11.3 赋范向量空间中的等距变换 ······ 129
11.4 连续实值函数空间 ······ 131
11.5 旋转 ······ 135
11.6 同构与等价 ······ 141
11.7 Banach 空间的积 ······ 142
11.8 空间 C 作为泛空间 ······ 144
11.9 对偶空间 ······ 146
第 12 章 线性维数 ······ 150
12.1 定义 ······ 150
12.2 空间 c 和 $l^p(p\geqslant 1)$的维数 ······ 150
12.3 空间 L^p 和 $l^p(p>1)$的维数 ······ 153
附录 Banach 空间中的弱收敛性 ······ 162
1 有界线性泛函集的弱导集 ······ 162

2　元素的弱收敛性 ······ 169
附注 ······ 177
名词索引 ······ 197
著作者索引 ······ 199

Banach 空间现代理论的某些方面

引言 ······ 203
第 1 章 ······ 205
1.1　自反与弱紧生成 Banach 空间，有关反例 ······ 205
第 2 章　Banach 空间的局部性质 ······ 209
2.2　Banach-Mazur 距离与投影常数 ······ 209
2.3　Banach 空间的局部表示 ······ 211
2.4　凸性模和光滑性模，超自反 Banach 空间，无条件收敛级数 ······ 215
第 3 章　逼近性质和基 ······ 219
3.5　逼近性质 ······ 219
3.6　有界逼近算子 ······ 221
3.7　基以及它们与逼近性质的关系 ······ 223
3.8　无条件基 ······ 226
第 4 章 ······ 230
4.9　Banach 空间类中 Hilbert 空间表征 ······ 230
第 5 章　古典 Banach 空间 ······ 236
5.10　古典 Banach 空间的等距理论 ······ 236
5.11　空间 L^p 的同构理论 ······ 240
5.12　空间 $L^p(\mu)$的同构结构 ······ 246
第 6 章 ······ 251
6.13　线性距离空间的拓扑结构 ······ 251
6.14　附加证明 ······ 255
文献 ······ 258
附加文献 ······ 276

引言 A Lebesgue-Stieltjes 积分

假定读者已经熟悉测度论和 Lebesgue 积分①.

A.1 Lebesgue 积分理论中的某些定理②

如果可测函数 $x_n(t)$ 有界，且序列 $\{x_n(t)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于函数 $x(t)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt=\int_a^b x(t)dt. \tag{1}$$

更一般地，如果存在可和函数 $\varphi(t)\geqslant 0$，使得 $|x_n(t)|\leqslant\varphi(t)$，对 $n=1,2,\cdots$，则极限函数也可和且满足等式(1).

如果函数 $x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上可和，并组成收敛于函数 $x(t)$ 的非减序列，则只要函数 $x(t)$ 可和，等式(1)就成立，否则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt=+\infty.$$

如果 p $(p\geqslant 1)$ 次方可和函数序列 $\{x_n(t)\}$ 几乎处处收敛于函数 $x(t)$，且如果

$$\int_a^b |x_n(t)|^p dt<K,\quad 对\ n=1,2,\cdots,$$

则函数 $x(t)$ 也 p 幂可和③.

A.2 p 次方可和函数的某些不等式④

在 $[a,b]$ 上 $p(p>1)$ 次方可和函数类将记为 L^p. 对于数 p 存在满足方程

---

① 例如，参看 C. dela Vallée Poussin. Intégraies de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Clasees de Baire. Paris: Gauthier-Villars, 1928. On H.Lebesgue. Leçons sur l'integration. 2-me edition. Paris: Gauthier-Viliare, 1928.

② 例如，参看 C. dela Vallee Poussin. 同上, 49.

③ 参看 E.W. Hobson. The Theory of Functions of a real variable …. 2nd Editions. Cambridge, 1921, 26(I): 300.

④ 参看 E.W. Hobson. 同上. vol. 1, 586.

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$对应的数$q$，称为$p$的共轭指数. 对$p=2$，有等式$q=2$.

如果函数$x(t)\in L^p$，以及$y(t)\in L^p$，则函数$x(t)y(t)$可和，且它的积分满足不等式

$$\left|\int_a^b xydt\right|\leqslant\left(\int_a^b |x|^p\ dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |y|^q\ dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

特别，对$p=2$，有

$$\left|\int_a^b xydt\right|\leqslant\left(\int_a^b x^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_a^b y^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

如果函数$x(t)$和$y(t)$属于L^p，则$x(t)+y(t)$也属于L^p，且有

$$\left(\int_a^b |x+y|^p\ dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b |x|^p\ dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |y|^p\ dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这些不等式类似于下面对应的算术不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

对$p=2$，从第一个不等式得著名的 Schwarz 不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对任何p ($p\geqslant 1$)次方可和函数以及任何$\varepsilon>0$，存在连续函数$\varphi(t)$满足①

$$\int_a^b |x-\varphi|^p<\varepsilon.$$

① 例如，参看 E. W. Hobson. 同前. vol. II, 250.

A.3　渐近收敛性

定义在某个集合上的可测函数序列 $\{x_n(t)\}$ 称为渐近收敛(或测度收敛)于定义在相同集合上的函数 $x(t)$，如果对每个 $\varepsilon > 0$，有[①]

$$\lim_{n\to\infty} m \underset{t}{E}(|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon) = 0,$$

其中 $m(A)$ 是集合 A 的 Lebesgue 测度.

渐近收敛于函数 $x(t)$ 的序列 $\{x_n(t)\}$ 总有几乎处处收敛于(在通常逐点意义下)这个函数的子序列.

序列 $\{x_n(t)\}$ 渐近收敛的充分必要条件是：对任何 $\varepsilon > 0$，总有[②]

$$\lim_{i,k\to\infty} m(\{t : |x_i(t) - x_k(t)| > \varepsilon\}) = 0.$$

A.4　平均收敛性

在 $[a,b]$ 上 p $(p \geqslant 1)$ 次方可和函数序列 $\{x_n(t)\}$ 称为 p 次方平均收敛于 p 次方可和函数 $x(t)$，如果

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p dt = 0.$$

这样的函数 $x(t)$ 存在的充分必要条件是

$$\lim_{i,k\to\infty} \int_a^b |x_i(t) - x_k(t)|^p \, dt = 0.$$

于是，函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上除了零测度集是唯一确定的.

平均收敛于函数 $x(t)$ 的函数序列也渐近收敛于这个函数[③]，因此(见 A.3 节)，它有几乎处处逐点收敛于这同一函数的子序列.

---

① mE 表示集合 E 的测度；符号 $\underset{t}{E}(\ )$ 表示对所有 t 值具有性质 ( ) 的集合.

② 例如，参看 E. W. Hobson. 同前. vol. II, 242-244.

③ 例如，参看 E. W. Hobson. 同前. vol.II, 245.

A.5 Stieltjes 积分①

设 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$a(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. 用数

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$$

将区间 $[a,b]$ 划分成子区间，并在每个子区间任取数 θ_i，类似于 Riemann 积分的定义，作和

$$S=\sum_{i=1}^{n}x(\theta_i)[\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})],\qquad 其中\ t_i\geqslant\theta_i\geqslant t_{i-1}.$$

我们指出，若对每一个细分序列，当最大子区间长度趋于零时和式 S 有极限，这个极限记为

$$\int_a^b x(t)d\alpha(t),$$

称它为 Stieltjes 积分.

这个积分有下面性质：

$$\int_a^b x(t)d\alpha(t)=-\int_b^a x(t)d\alpha(t),$$

$$\int_a^b x(t)d\alpha(t)+\int_b^c x(t)d\alpha(t)=\int_a^c x(t)d\alpha(t),$$

$$\int_a^b [x_1(t)+x_2(t)]d\alpha(t)=\int_a^b x_1(t)d\alpha(t)+\int_a^b x_2(t)d\alpha(t).$$

第一中值定理在这里取不等式

$$\left|\int_a^b x(t)d\alpha(t)\right|\leqslant MV,$$

其中 M 是绝对值 $|x(t)|$ 的上确界，V 是函数 $\alpha(t)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差.

如果函数 $\alpha(t)$ 绝对连续, Stieltjes 积分可以表示为下面的 Lebesgue 积分：

---

① 例如，参看 H. Lebesgue. 同前，第 11 章.

$$\int_a^b x(t)d\alpha(t) = \int_a^b x(t)\alpha'(t)dt.$$

如果 $\alpha(t)$ 是递增函数(即当 $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$ 时 $\alpha(t') < \alpha(t'')$), 且若对区间 $[\alpha(a), \alpha(b)]$ 中的所有数 s，令

$$\beta(s) = \sup(\{t : s \geqslant \alpha(t)\}),$$

则得到

$$\int_a^b x(t)d\alpha(t) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]ds. \qquad (2)$$

[①]

证明　由 $\beta(s)$ 的定义, 有

$$\beta[\alpha(t)] = t, \quad 对 a \leqslant t \leqslant b. \qquad (3)$$

由于假设 $\beta(s)$ 递增, 且由(3)它在区间 $[a,b]$ 取所有值, $a = \beta[\alpha(a)]$ 和 $b = \beta[\alpha(b)]$, 因此它是连续函数. 由此函数 $x[\beta(s)]$ 连续.

考虑 $[a,b]$ 的分划 δ： $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$，并取 $\alpha(t_i) = \theta_i$, 对 $i = 1, 2, \cdots, n$，有

$$I_i = \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} x[\beta(s)]ds = (\theta_i - \theta_{i-1})\chi(\theta_i'),$$

其中 $\theta_i' = \beta(s_i')$ 和 $\theta_{i-1} \leqslant \theta_i' \leqslant \theta_i$. 显然 $\beta(\theta_{i-1}) \leqslant \beta(s_i') = \theta_i' \leqslant \beta(\theta_i)$. 由(3)有 $\beta(\theta_{i-1}) = \beta[\alpha(t_{i-1})] = t_{i-1}$, 类似地, $\beta(\theta_i) = t_i$. 因此

$$t_{i-1} \leqslant \theta_i' \leqslant t_i,$$

所以

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]ds = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n x(\theta_i')[\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})]. \qquad (4)$$

现在, 当分划 δ 最大子区间的长度趋于零时, 这个和式趋于 $\int_a^b x(t)d\alpha(t)$，从而由(4)得(2), 证毕.

因此, 现在允许 $\alpha(t)$ 为任一有界变差函数. 这样的函数 $\alpha(t)$ 总可以写为两个递增函数 $\alpha_1(t)$ 和 $\alpha_2(t)$ 之差 $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$, 如前, 用 $\beta_1(s)$ 和 $\beta_2(s)$ 表示对应的函数, 得到

① 参看 H. Lebesgue. 同前, 258-260.

$$\int_a^b x(t)d\alpha(t) = \int_a^b x(t)\,d\alpha_1(t) - \int_a^b x(t)\,d\alpha_2(t)$$

$$= \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x[\alpha_1(s)]\,ds - \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x[\alpha_2(s)]\,ds.$$

如果函数 $x_n(t)$ 连续且一致有界，且如果序列 $\{x_n(t)\}$ 处处(逐点)收敛于函数 $x(t)$，则对每个有界变差函数 $\alpha(t)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)d\alpha(t) = \int_a^b x(t)d\alpha(t),$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x_n[\beta_1(s)]ds = \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x[\beta_1(s)]ds$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x_n[\beta_2(s)]ds = \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x[\beta_2(s)]ds.$$

A.6　Lebesgue 定 理

注意下面的 Lebesgue 定理[①].

对每个在 $[0,1]$ 上的有界可测函数 $\alpha(t)$，可和函数序列 $\{x_n(t)\}$ 满足等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \alpha(t)x_n(t)dt = 0$$

的充分必要条件是下面三个条件同时满足：

(1) 序列 $\left\{\int_0^1 |x_n(t)|\,dt\right\}$ 有界；

(2) 对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0$，使得对 $[0,1]$ 中每个测度小于 η 的子集 H，不等式 $\left|\int_H x_n(t)dt\right| \leqslant \varepsilon$，对 $n = 1, 2, \cdots$ 成立；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)dt = 0$, 对每个 $0 \leqslant u \leqslant 1$.

本书后面将得到这个类型的其他定理.

---

① H. Lebesgue. Annales de Toulouse, 1909.

引言 B　距离空间中的(*B*)可测集和可测算子

B.7　距 离 空 间

非空集 E 称为距离空间或 D 空间，如果对它的元素的每一有序偶 (x,y)，对应有满足下面条件的数 $d(x,y)$ [①]：

① $d(x,y)=0$，$d(x,y)>0$ 当 $x\neq y$；

② $d(x,y)=d(y,x)$；

③ $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

数 $d(x,y)$ 称为点(元素) x,y 之间的距离. 点列 $\{x_n\}$ 称为收敛[②]，如果

$$\lim_{p,q\to\infty} d(x_p,x_q)=0\text{;} \tag{5}$$

点列 $\{x_n\}$ 称为收敛于点 x_0，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，如果

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=0. \tag{6}$$

点 x_0 称为点列 $\{x_n\}$ 的极限.

容易看出，由(6)得(5)，因为总有

$$d(x_p,x_q)\leqslant d(x_p,x_0)+d(x_q,x_0).$$

因此，一个序列收敛于一点，这个序列收敛，当然，其逆并不总是成立.

距离空间中每个收敛序列都收敛于某个点，具有这样性质的 D 空间称为完备的.

距离空间中每个(无穷)点列都有收敛于某个点的子序列，具有这样性质的空间称为紧的.

Euclid 空间是完备空间的一个例子. 现在将叙述某些其他重要例子.

---

① 三个条件①~③可用下面两个条件代替：1*) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$，2*) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$，见 A. Lindenbaum. Sur les espaces métriques. Fundamenta Mathematicae, 1926, 8: 211.

② 这个意义下的序列收敛称为序列满足 Cauchy 条件，即满足条件(5).

(1) 区间[0,1]上的可测函数集 S. 对这个集合的元素的每一有序偶 (x,y) [①], 令

$$d(x,y)=\int_0^1 \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}dt.$$

容易验证它满足上面条件①~③. 事实上, 显然条件①和②满足(这里不区分仅在零测度集上不同的两个函数), 为了看到条件③也满足, 只需注意对每对实数 a,b, 有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

因此集合 S 成为距离空间; 这个空间是完备的, 因为它的点列 $\{x_n\}$ 的收敛性(收敛于点 x_0)意味着函数序列 $\{x_n(t)\}$ 按测度在[0,1]上收敛(收敛于 $x_0(t)$).

(2) 所有的数列集合 s. 对它的元素的每一有序偶 (x,y), 令

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|\xi_n-\eta_n|}{(1+|\xi_n-\eta_n|)},$$

其中, 在所有空间序列的例子中, $x=\{\xi_n\}$ 和 $y=\{\eta_n\}$.

于是, 集合 s 变成完备的距离空间. 事实上, 点列 $\{x_m\}$ 收敛且收敛于点 x_0, 这意味着(令 $x_m=\{\xi_n^{(m)}\}$ 和 $x_0=\{\xi_n\}$)对每个自然数 n, 当 m 趋于无穷时每个序列 $\{\xi_n^{(m)}\}$ 收敛, 且收敛于 ξ_n.

(3) 区间[0,1]上的有界可测函数集 M. 对它的每对元素 x,y, 令

$$d(x,y)=\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant i}|x(t)-y(t)|,$$

得到一个完备的距离空间. 点列 $\{x_n\}$ 的收敛性(对应收敛于 x_0), 在这里意味着函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在[0,1]上几乎处处收敛(收敛于函数 $x_0(t)$).

(4) 有界数列集 m. 令

$$d(x,y)=\sup_{1\leqslant n<\infty}|\xi_n-\eta_n|,$$

显然得到一个完备的距离空间 m.

(5) [0,1]上的连续函数集 C. 对它的每对元素 x,y, 令

$$d(x,y)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|.$$

---

① 在所有例子中 x 和 y, 对应的 x_n 和 x_0 分别表示 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$, 对应的 $x_n=x_n(t)$ 和 $x_0=x_0(t)$, 它们都是函数集合的元素.

于是集合 C 构成一个完备的距离空间，其中点列 $\{x_n\}$ 的收敛性(对应收敛于 x_0)，在这里变成函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在[0,1]上一致收敛(收敛于函数 $x_0(t)$).

(6) 收敛数列集 c. 对其中的每对元素 x,y，定义距离 $d(x,y)$ 与空间 m 中的相同. 于是容易看出 c 也形成一个完备的距离空间.

(7) [0,1]上 p 阶导数连续的函数集 C^p. 令

$$d(x,y)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x^{(p)}(t)-y^{(p)}(t)|,$$

得到一个完备的距离空间. 这个空间中的点列 $\{x_n\}$ 收敛(对应收敛于 x_0)的充分必要条件是两个函数序列 $\{x_n(t)\}$ 和 $\{x_n^{(p)}(t)\}$ 在[0,1]上都一致收敛(它们分别收敛于函数 $x_0(t)$ 和 $x_0^{(p)}(t)$).

(8) [0,1]上 p 次方可和函数集 L^p，其中 $p\geqslant 1$. 令

$$d(x,y)=\left[\int_0^1|x(t)-y(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

则看到 L^p 成为完备的距离空间. 其中点列 x_n 收敛(对应收敛于 x_0)的充分必要条件是函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在[0,1]上 p 次方收敛(收敛于函数 $x_0(t)$).

(9) 满足级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p$ 收敛的数列集合 l^p，其中 $p\geqslant 1$. 对 l^p 中的元素 x,y，令

$$d(x,y)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

得到一个完备的距离空间.

(10) 圆周 $|z|\leqslant 1$ 上一致连续的解析函数 $f(z)$ 的集合形成一个完备的距离空间，只要在两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 之间定义距离

$$\max_{|z|\leqslant 1}|f(z)-g(z)|.$$

应该指出，在对应的例子(3), (5), (7)和(8)中可以定义 n 个变量的函数.

B.8　距离空间中的集合

设 E 是任一距离空间，G 是 E 中元素(点)的任意集.

点 x_0 称为集合 G 的聚点，如果存在点列 $\{x_n\}$ 使得对每个 n，$x_0\neq x_n\in G$，且

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. G 的所有聚点的集合称为导集，记为 G'. 集合

$$\overline{G} = G + G'$$

称为集合 G 的闭包，当 $G' \subseteq G$ 时称 G 是闭的，若 $G' = G$ 则称 G 是完满集. 称集 G 是开的，如果它的补，即 $E \setminus G$ 是闭集. 每个开集也称为它每个点的近域或邻域.

给定点 $x_0 \in E$ 与数 $r_0 > 0$，所有满足 $d(x, x_0) \leqslant r_0$ 的点 x 的集合称为球；所有满足 $d(x, x_0) < r_0$ 的点 x 的集合为开球；点 x_0 和数 r_0 分别称为这个球的中心和半径. 集合 G 称为稠的，如果 $\overline{G} = E$；称为无处稠，如果 $\overline{G}$ 不包含任何球.

空间 E 称为可分的，如果它包含可数多个稠子集. 容易看到，每一个紧距离空间，即它的每个点列都有收敛子序列的距离空间(参看 B.7 节)是可分的.

集合 G 称为第一纲集或者纲集 I，如果它可以表示为可数多个无处稠子集族的并；否则，称它为第二纲集或者纲集 II. 一个集合在点 x_0 称为是第一纲集，如果存在 x_0 的邻域 V，使得 $G \cap V$ 是第一纲集；如果 x_0 不存在这种性质的邻域，就说 G 在 x_0 是第二纲集.

可以证明下面的定理：

定理 1 若 G 在任意距离空间 E 内是第二纲集，则在 E 中存在球 K，使得集 G 是 $G \cap K$ 的每一点的第二纲集①.

暂时设 E 是完备距离空间. 下面证明

引理 如果 (K_n) 是 E 中半径为 r_n 的球列，对 $n = 1, 2, \cdots$，满足 $K_{n+1} \subseteq K_n$，以及 $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$，则存在位于所有这些球中的点.

证明 设 x_n 是球 K_n 的中心. 由假设，如果 $p < q$，有 $x_q \in K_q \subseteq K_p$，因此

$$d(x_p, x_q) \leqslant r_p. \tag{7}$$

由此得知点列 $\{x_n\}$ 收敛. 由于 E 是完备的，设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$，对 $p < q$ 考虑到(7)，有 $d(x_p, x_0) \leqslant d(x_p, x_q) + d(x_q, x_0) \leqslant r_p + d(x_q, x_0)$，因此 $d(x_p, x_0) \leqslant r_p$. 现在由于 p 是任意的，点 x_0 属于所有的球 K_n，证毕.

这个引理的一个简单推论是

定理 2 每个完备的距离空间 E 是第二纲的.

证明 假设定理不成立，设

---

① 证明见 S. Banach. Théorème sur les ensembles de premiere catégorie. Fundamenta Mathematicae XVI, 1930: 395.

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, \tag{8}$$

其中每一个 G_n 无处稠密. 于是存在半径为 $\{r_n\}$ 的球列 $\{K_n\}$ 具有下面性质:

$$K_1 \cap G_1 = \varnothing, \quad r_1 < 1, \quad \text{以及} K_{n+1} \subset K_n, \quad K_{n+1} \cap G_{n+1} = \varnothing, \quad r_{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

由引理, 存在属于所有这些球的点 x_0. 现在由于对每个 $n = 1, 2, \cdots$, 有 $K_n \cap G_n = \varnothing$, 这点不可能属于任何 G_n, 这与(8)矛盾.

现在设 E 是任意距离空间, F 是 E 的任一子集. 如果 F 中的距离定义与 E 中的相同, 则集合 F 本身是某个距离空间.

考虑集合 $G \subseteq F$. 如果它作为距离空间 F 的子集是无处稠的,就说它相对于集 F 是无处稠的. 通常只有当 $F = E$ 时略去"相对于集 F". 以上对这节开始引入的其他定义同样适用.

由定理 1 得知, 如果集合 G 在它的每一点相对于 F 是纲集 I, 那么它相对于 F 是第一纲集. 类似地, 由定理 2 得知, 如果距离空间 E 是完备空间且集合 F 是闭集, 则这个集合相对于它自己是纲集 II.

在任意距离空间 E 内, 考虑这个空间内满足下面条件的子集最小类 $\mathfrak{B}$:

① 每一个闭集属于 $\mathfrak{B}$;

② 属于 $\mathfrak{B}$ 的集合的每个可数并属于 $\mathfrak{B}$;

③ 属于 $\mathfrak{B}$ 的集合的每个补属于 $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B}$ 类的集合称为"B 可测集". 集合 G 称为满足 Baire 条件, 如果每个包含点 x_0 的非空完满集 P, 使得集合 $P \cap G$ 和 $P \setminus G$ 中至少一个在点 x_0 相对于 P 是纲集 I.

定理 3　每一个 B 可测集满足 Baire 条件①.

B.9　距离空间中的映射

设 E 和 E_1 是两个任意非空集. 若对每个元素 $x \in E$, 存在 E_1 中对应的某个元素, 则说在集 E 中定义了一个映射或算子. 对应于 x 的元素称为此映射在 x 的值; 集合 E 是熟知的定义域, 而值的集合称为映射的值域. 在所给映射的值是数时称它为泛函.

现在设 E 是距离空间, U 是以 E 为定义域和某个距离空间为值域的映射. 映

① 证明见 S. Banach. 同上, 398.

射 U 称为在点 x_0 连续，如果对每个收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$，都有 $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x_0)$；称映射 U 在 E 中连续，如果它在这个空间的每一点连续. 如果映射序列 $\{U_n(x_0)\}$ 和另外一个映射 $U_0(x)$ 给定，它们都定义在 E 上，且它们的值域位于同一个距离空间内，映射序列称为在点 x_0 收敛于映射 $U_0(x_0)$，如果值序列 $\{U_n(x_0)\}$ 收敛于 $U_0(x_0)$；映射序列 $\{U_n\}$ 称为在 E 中收敛于映射 U_0，如果它在 E 的每一点收敛. 如果映射序列 $\{U_n\}$ 在 E 中收敛于映射 U_0，这后一个映射称为 $\{U_n\}$ 在 E 中的极限. 当考虑的空间明显知道时就简单地用"连续映射"代替"在 E 中的连续映射"，对其他术语同样适用.

设 $\mathscr{F}$ 是映射的最小类，它们都以所给距离空间 E 作为它们的定义域，值域都位于某个其他空间，并满足条件：

① 每个连续映射都属于 $\mathscr{F}$；

② 属于 $\mathscr{F}$ 的映射序列的每个极限属于 $\mathscr{F}$.

这类映射是熟知的"B 可测映射"

具定义域 E，值域也是距离空间的映射 U 称为满足 Baire 条件，如果对每个非空完满集 $P \subseteq E$，存在相对于 P 是 I 类纲集 G，使得限制在空间 $P \setminus G$ 上的映射 U 在这空间中连续.

定理 4 每一个 B 可测映射都满足 Baire 条件[①].

等价地，可以证明

定理 5 如果定义在空间 E 中的映射 U 是连续映射的极限，则在 E 中存在 I 类纲集 G,使得映射 U 在集合 $E \setminus G$ 中的每一点连续.

下面的定理建立 B 可测集与 B 可测映射之间的关系；设它们定义在距离空间 E，且取值于空间 E_1.

定理 6 如果映射 U 是 B 可测的，则对每个 B 可测集 $G_1 \subseteq E_1$，满足 $U(x) \in G_1$ 的点 x 的集 G 是 B 可测[②].

定理 7 如果空间 E 和 E_1 可测，映射 U 在 E 中连续，则 B 可测集 $G \subseteq E$ 的像满足 Baire 条件. 进一步，如果由 $x \neq x'$ 总有 $U(x) \neq U(x')$，则 B 可测集的像也 B 可测.

这个定理的第一部分由下面事实得知：B 可测集的连续像永远是所谓"解析"集[③]，而每个解析集满足 Baire 条件[④]. 这个定理的第二部分以及定理 6 的证明也可

① 证明见 S. Banach. 同上, 397.

② 见 F. Hausdorff. Mengenlehre. Berlin und Leipzig, 1927: 195.

③ 例如，见 F. Hausdorff. 同上, 179, 208 和 II 209.

④ 见 O. Nikodym. Sur une propriété de l'opération *A*. Fundamenta Mathematicae, 1925, 7: 149-154；在那里可找到对 Euclid 空间的证明，对一般情形也没有什么困难，因为只要注意上述关于 I 类纲集的定理(S. Banach. 同上 395).

在 F. Hausdorff 的集合论[①]中找到.

定理 8　如果映射U'和U''是B可测，则泛函$d\big(U'(x),U''(x)\big)$也B可测.

证明由下面事实得知：如果映射U'和U''连续，则泛函$d\big(U'(x),U''(x)\big)$连续，且对每一点$y_0\in E_1$，泛函$d\big(y,y_0\big)=d(y_0,y)$在$E_1$中连续.

定理 9　如果$\{U_n\}$是B可测映射序列，则使得这个序列收敛的点的集是B可测的.

证明　对自然数p,q和r，设$G_{p,q,r}$是满足$d(U_p(x),U_q(x))\leqslant\dfrac{1}{r}$的点$x$的集合. 由定理 6 和定理 8，集$G_{p,q,r}$是$B$可测的. 现在，$G=\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}\bigcap\limits_{q=p}^{\infty}G_{p,q,r}$，故$G$是$B$可测的.

定理 10　如果$\{U_n'\}$和$\{U_n''\}$是B可测映射序列，又若对每点$x\in E$有$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}d(U_n'(x),U_n''(x))<\infty$，则泛函$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}d(U_n'(x),U_n''(x))$是$B$可测的.

证明　对每对自然数p,q以及每点x，令

$$F_{p,q}(x)=\max_{p\leqslant n\leqslant p+q-1}d(U_n'(x),U_n''(x)).$$

显然，对每点x有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}d(U_n'(x),U_n''(x))=\lim_{p\to\infty}\lim_{q\to\infty}F_{p,q}(x).$$

因此，只要证明每个泛函$F_{p,q}$是B可测就够了. 现在，由定理 8，每个泛函$F_{p,1}(x)=d(U_p'(x),U_p''(x))$都是$B$可测的，且由于对每个$q>1$有

$$2F_{p,q+1}(x)=F_{p,q}(x)+F_{p+q,1}(x)+|F_{p,q}(x)-F_{p+q,1}(x)|,$$

再次应用定理 8 由归纳法得知，所有泛函$F_{p,q}$是B可测的.

定理 11　对 II 类纲集$G\subseteq E$的每个元素x，给定非负连续泛函序列$\{F_n\}$，满足$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}F_n(x)<\infty$，则存在球$K\subseteq E$与数$N$，使得对每个$x\in K$和每个$n=1,2,\cdots$，有$F_n(x)\leqslant N$.

证明　对$n=1,2,\cdots$，满足$F_n(x)\leqslant i$的点x的集合G_i显然是闭的且$G\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}G_i$；因此存在指标$N$使得$G_N$是 II 类纲集. 由于它是闭集，它包含所需的球$K$.

---

① 同上. 208, II.

第 1 章　群

1.1　G 空间的定义

给定完备空间 E. 假设对空间 E 中元素的每一有序对 (x,y)，存在这个空间对应的称为 x 和 y 的和的唯一元素 z，记为 $x+y$.

进一步假设 E 在这个和运算下是一个群，即

I_1　$(x+y)+z=x+(y+z)$;

I_2　E 中存在零元素 Θ，使得

$$\Theta+x=x+\Theta=x,\quad \text{对每一个 } x\in E\text{；}$$

I_3　对 E 中每个元素 x，存在对应的元素(记为 $-x$)满足方程

$$x+(-x)=\Theta.$$

从这些公理容易得到：

a) 在 E 中仅存在一个零元素 Θ；

b) 对每个 $x\in E$ 有 $(-x)+x=\Theta$；

c) 由 $x+y=x+z$ 得 $y=z$.

进一步假设下面公理满足：

II_1　由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-x$；

II_2　由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x+y$.

满足这些公理的完备距离空间称为 G 空间.

附注　以 $x-y$ 代替 $x+(-y)$，以 $-x+y$ 代替 $(-x)+y$.

1.2　子群的性质

设 E 是 G 空间. 对元素 $x\in E$ 和集合 $H\subseteq E$，分别用 xH 和 Hx 记满足 $y=x+z$ (对应 $z+x$)的所有元素 $y\in E$ 的集合，其中 $z\in H$.

显然，永远有恒等式

$$x(H_1 \cup H_2) = xH_1 \cup xH_2;$$
$$x(H_1 \setminus H_2) = xH_1 \setminus xH_2;$$
$$x(H_1 \cap H_2) = xH_1 \cap xH_2$$

以及对 H_1x 和 H_2x 的类似恒等式.

容易证明，如果 H 分别有任何闭、开、无处稠、I类纲、II类纲或 B 可测等性质，则集合 xH 也有相同的性质. 如果 z 是 H 的内点，则 $x+z$ 是 xH 的内点.

非空集 $H \subseteq E$ 称为 E 的子群，如果由条件 $x \in H$ 和 $y \in H$ 得知 $x+y \in H$ 和 $-x \in H$，显然也有 $\Theta \in H$.

一个集合称为是连通的，如果它不能表示为它的两个非空不相交的相对闭子集的并. 如果 E 是连通集，H 是它的子集，它既开又闭，则有 $H=E$，否则 $E \setminus H$ 也是非空且闭.

定理 1 每个II类纲的且满足 Baire 条件的子群 $H \subseteq E$ 在 E 中既开又闭.

证明 由引言B.8中的定理1，存在开球 K，在其中 H 是处处II类纲集. 显然可以假设 K 的球心 y_0 属于 H. 由于 H 满足 Baire 条件，$K \setminus H$ 是I类纲集. 现在，由于 y_0 是 K 的内点，点 $\Theta = -y_0 + y_0$ 是 $(-y_0K)$ 的内点. 因此存在中心在 Θ 的开球 $K_1 \subseteq (-y_0)K$，有 $(-y_0)[K \setminus H] = (-y_0)K \setminus (-y_0)H$，以及由于 $(-y_0)H = H$，又 H 是子群，故 $(-y_0)[K \setminus H] = (-y_0)K \setminus H \supseteq (K_1 \setminus H)$，由此得知，$K \setminus H$，因此 $(-y_0)[K \setminus H]$ 是I类纲集，$K_1 \setminus H$ 也是I类纲集.

此外，对每点 $x \in K_1$，有 $x \in xK_1$，因为 $\Theta \in K_1$ 以及 $x + \Theta = x$. 因此 $K_1 \cap xK_1 \neq \varnothing$. 从而存在中心在 x 的开球 $K_2 \subseteq K_1 \cap xK_1$. 有 $K_2 \setminus H \subseteq K_1 \setminus H$ 以及 $K_2 \setminus xH \subseteq (xK_1 \setminus xH) = x[K_1 \setminus H]$，由此得知，集合 $K_2 \setminus H$ 和 $K_2 \setminus xH$ 也是I类纲集.

由此得知，$H \cap xH \neq \varnothing$；因此存在 y，使得 $y \in H$ 和 $y \in xH$，故 $-x+y \in H$，从而 H 是半群，$-x = -x + y - y \in H$，因此 $x \in H$.

由此证明了 $K_1 \subseteq H$，因而 Θ 是 H 的内点. 由于对每点 $y \in H$，有 $yH = H$ 和 $y = y + \Theta$，H 的每点 y 是内点. 因此，H 是开集.

为了证明它也是闭集. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$，其中对每个 $n = 1, 2, \cdots$，有 $y_n \in H$. 现在，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(y - y_n) = \Theta \in K_1 \subseteq H$，存在 n 使得 $y - y_n \in K_1 \subseteq H$，因此，$y = y - y_n + y_n \in H$，证毕.

由这个定理得

定理 2 如果空间 E 连通，则每个子群 $H \subseteq E$ 关于 E 是II类纲集且满足 Baire 条件.

附注　由于每一个 B 可测集满足 Baire 条件, 定理 1 和定理 2 成立, 特别, 当 H 是 B 可测集时.

1.3　加性算子和线性算子

设 E 和 E_1 是 G 空间, U 是定义在 E 中的算子, 它的值域位于 E_1 内.

算子 U 称为加性的, 如果

$$U(x+y)=U(x)+U(y),\quad \text{对所有 } x,y\in E.$$

于是有 $U(x)=U(x+\Theta)=U(x)+U(\Theta)$, 因此

$$U(\Theta)=\Theta.$$

又因为 $\Theta=U(\Theta)=U(x-x)=U(x)+U(-x)$, 有

$$U(-x)=-U(x).$$

连续加性算子称为线性算子.

附注　在这里算子比映射更一般.

定理 3　在一点连续的每个加性算子是线性映射.

证明　设 x_0 是加性算子 U 的连续点, 设 $x_n\in E, x\in E$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x+x_0)=x_0$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}U(x_n-x+x_0)=U(x_0)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}[U(x_n)-U(x)+U(x_0)]=U(x_0)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}U(x_n)=U(x)$. 由此得知, 问题中的算子在任意点 x 也连续, 即它是线性算子.

定理 4　每个 B 可测加性算子是线性算子.

证明　由引言 B.9 的定理 4, 这样的算子满足 Baire 条件. 因此它在某个 $E\setminus H$ 是 I 类纲集的集 E 上连续. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\Theta$. 由于对 $n=1,2,\cdots$, 集 $x_n[E\setminus H]=E\setminus x_nH$ 是 I 类纲集, 故集

$$(E\setminus H)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}x_n[E\setminus H]=(E\setminus H)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\setminus x_nH)\supseteq E\setminus(H\bigcap_{n=1}^{\infty}x_nH)$$

也是 I 类纲集. 因此, 由引言 B.8 的定理 2, 它没有取尽空间 E.

从而, 存在点 x, 使得

$$x\in H \text{ 和 } x\in x_nH,\quad \text{对每一个 } n=1,2,\cdots.$$

因此，$(-x_n+x)\in H$，又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n+x)=x$，得知 $\lim\limits_{n\to\infty}U(-x_n+x)=U(x)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}[U(-x_n)+U(x)]=U(x)$，最后 $\lim\limits_{n\to\infty}U(x_n)=0$. 所以算子 $U(x)$ 在 E 中的点 Θ 连续，因此由 1.3 节定理 3 得知它是线性算子.

附注　应用这个证明的自然论述，得知这个定理对满足 Baire 条件的加性算子也成立.

定理 5　如果空间 E 连通，$\{U_n\}$ 是线性算子序列，则使得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n(x)$ 存在的点 x 的集合或者是I类纲集，或者等于整个 E.

证明容易从 1.2 节的定理 2 得到，因为由引言 B.9 中定理 9，使得算子序列 $\{U_n\}$ 收敛的 x 点集是 B 可测集. 因此，由引言中的定理 3，这个集合满足 Baire 条件. 此外，每个收敛点集构成一个群.

1.4　一个奇点的凝聚定理

定理 6　假设连通空间 E 和二重线性算子序列 $\{U_{p,q}\}$ 给定，$\{x_p\}$ 是对任何 $p=1,2,\cdots$，极限 $\lim\limits_{q\to\infty}U_{p,q}(x_p)$ 不存在的点列，则对任何 $x\in H$，任何值 $p=1,2,\cdots$，极限 $\lim\limits_{q\to\infty}U_{p,q}(x)$ 不存在的点 x 的集合 H 是II类纲集，它的补 $E\setminus H$ 是I类纲集.

证明　对每个 $p=1,2,\cdots$，设 H_p 是使得序列 $\{U_{p,q}\}$ 收敛的点列. 有 $H_p\neq E$，因为由假设 $x_p\in E\setminus H_p$. 由引言 B.9 中的定理 5，集合 H_p 是I类纲集. 因此，对集合 $\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}H_p$ 同样成立，这就完成了证明，因为 $H=E\setminus\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}H_p$.

第 2 章　一般向量空间

2.1　向量空间的定义与基本性质

假设给定一个非空集 E，对 E 中元素的每个有序偶 (x,y)，存在 E 中对应的元素 $x+y$ (称为 x 与 y 的和)，以及对每一个数 t 和 $x \in E$，存在 E 中对应的元素 tx (称为数 t 与元素 x 的积)，以这样方式定义的运算称为*加法*和*数量乘法*，它们满足下面的条件(其中 x,y 和 z 表示 E 中的元素，a,b 为数)：

① $x+y=y+x$；

② $x+(y+z)=(x+y)+z$；

③ $x+y=x+z$ (隐含 $y=z$)；

④ $a(x+y)=ax+ay$；

⑤ $(a+b)x=ax+bx$；

⑥ $a(bx)=(ab)x$；

⑦ $1\cdot x=x$.

在这些假设下，称集合 E 组成一个*向量空间*，或*线性空间*. 于是容易看出，恰好存在一个元素，记为 Θ，使得对所有 $x \in E$，有 $x+\Theta=x$，以及由等式 $ax=bx$ 得 $a=b$，其中 $x \neq \Theta$；此外，由等式 $ax=ay$ 得 $x=y$，其中 $a \neq 0$.

另外，由定义

$$-x=(-1)x \text{ 和 } x-y=x+(-y).$$

当用通常的加法和数量乘法定义以后，前面距离空间的例子 1~10 都是向量空间.

当 $x \neq y$ 时，连接 x 和 y 的线段理解为形如 $tx+(1-t)y$ 的所有元素的集合，其中 t 是区间[0,1]中的任何数.

集合 $G \subseteq E$ 称为是凸的，如果它包含 G 内连接任何一对元素的线段.

如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是向量空间的元素，表达式

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$$

称为元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的*线性组合*，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是任意实数.

2.2　加性齐次泛函的扩张

设 E 和 E_1 是两个向量空间，f 是 E 中的映射，它的值域位于 E_1 中.

映射 f 称为加性的，如果对每对元素 x,y，有

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

称它为齐次的，如果对每个元素 x 和每个数 t，有

$$f(tx)=t\,f(x).$$

定理 1[①]　假设给定

1° 定义在 E 上的泛函 p，使得对所有 $x,y\in E$ 有

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y) \text{ 与 } p(tx)=tp(x), \quad \text{对 } t>0;$$

2° 定义在向量子空间 $G\subseteq E$ (即 E 的子集与向量空间本身的基本运算定义相同)上的加性齐次泛函 f，使得对每个 $x\in G$ 有

$$f(x)\leqslant p(x),$$

则总存在定义在 E 上的加性齐次泛函 F，使得

$$F(x)\leqslant p(x), \quad \text{对每个 } x\in E; \qquad F(x)=f(x), \quad \text{对每个 } x\in G.$$

证明　可以假设 $G\neq E$，设 $x_0\in E\setminus G$. 由 2°，对 $x',x''\in G$ 有

$$\begin{aligned}f(x'')-f(x')=f(x''-x')\leqslant p(x''-x')&=p[(x''+x_0)+(-x'-x_0)]\\&\leqslant p(x''+x_0)+p(-x'-x_0),\end{aligned}$$

因此

$$-p(-x'-x_0)-f(x')\leqslant p(x''+x_0)-f(x'').$$

从而数

$$m=\sup_{x\in G}\,[-p(-x-x_0)-f(x)] \text{ 和 } M=\inf_{x\in G}\,[p(x+x_0)-f(x)]$$

有限，且 $m\leqslant M$. 如果 r_0 是满足 $m\leqslant r_0\leqslant M$ 的任何数，则对每个 $x\in G$ 有

---

① 参看 S. Banach. Sur les fonctionnelles linèaires II. Studia Mathematica I, 1929：226.

$$-p(-x-x_0)-f(x)\leqslant r_0\leqslant p(x+x_0)-f(x). \tag{1}$$

考虑下面形式的所有元素 y 的集合 G_0：

$$y=x+tx_0,\ \text{其中}x\in G,t\ \text{是数}. \tag{2}$$

显然 G_0 是向量空间. 令

$$g(y)=f(x)+tr_0, \tag{3}$$

其中元素 y 由(2)给出；由于 $x_0\in E\setminus G$，每一个 $y\in G_0$ 有唯一表达式(2), 因此泛函 g 在 G_0 上有定义. 同时也看到 g 在 G_0 上是加性齐次泛函, 且在 G 上与 f 重合. 现在证明

$$g(y)\leqslant p(y),\ \text{对每个}\ y\in G_0. \tag{4}$$

事实上, 如果将 y 写为(2)的形式, 可假设 $t\neq 0$. 在不等式(1)中以 $\frac{x}{t}$ 代替 x 并以 t 按 $t>0$ 或 $t<0$ 乘它的右端或左端, 得到 $tr_0\leqslant p(x+tx_0)-f(x)$，再由(3)得不等式(4).

由 f 的逐次扩张现在建立了集合 $E\setminus G$ 足够的良序, 于是按照上面叙述的过程, 泛函 F 满足定理的结论.

推论　给定定义在 E 上的泛函 p，使得对 $x,y\in E$ 有

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)\ \text{和}\ p(tx=tp(x),\ \text{对}\ t\geqslant 0,$$

则存在定义在 E 上的加性齐次泛函 F，使得对每个 $x\in E$ 有

$$F(x)\leqslant p(x).$$

事实上, 考虑 $x_0\in E$，并以 G 表示所有形如 tx_0 的元素的集合, 其中 t 是任意数. 于是 G 是向量空间. 在 G 中令 $f(tx_0)=tp(x_0)$，对任何 t 有 $f(tx_0)\leqslant p(tx_0)$，由于 $t\geqslant 0$ 得 $tp(x_0)=p(tx_0)$，以及 $t<0$ 得 $0=p(0)\leqslant p(x_0)+p(-x_0)$，因此 $p(x_0)\geqslant -p(-x_0)$，最后得 $tp(x_0)\leqslant -tp(-x_0)=p(tx_0)$，现在应用 2.2 节的定理 1 得所求结果.

2.3　应用：积分, 测度, 极限概念的推广

现在讨论 2.2 节定理 1 和其推论的几个有趣应用.

1. 设 E 是定义在单位圆周上的有界实值函数 $x(s)$ 集, 其中 s 永远表示从某个

不动点开始测量的弧长. 利用通常的代数运算, E 是一个向量空间.

现在, 对 E 中每一个元素 $x=x(s)$, 定义 $p(x)$ 是所有形如

$$N(x;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sup_{-\infty<s<\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x(s+\alpha_k)\right)$$

的数 $N(x;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的下确界, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是任意有限数列. 于是泛函 p 满足上面推论的所有条件. 首先, 显然, 对 $t\geqslant 0$ 永远有 $p(tx)=tp(x)$.

其次, 给定 E 的两个元素 $x=x(s)$ 和 $y=y(s)$ 以及数 $\varepsilon>0$, 存在有限数列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_u$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_v$, 使得

$$M(x;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_u)\leqslant p(x)+\varepsilon \text{ 以及 } M(y;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_v)\leqslant p(x)+\varepsilon. \tag{5}$$

将所有数 $\alpha_i+\beta_j$ 排列成单个数列 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{uv}$, 其中 $i=1,2,\cdots,u$ 和 $j=1,2,\cdots,v$. 则有

$$p(x+y)\leqslant N(x+y;\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{uv}), \tag{6}$$

容易验证

$$M(x+y;\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{uv})\leqslant M(x;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_u)+M(y;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_v). \tag{7}$$

由关系式(5)~(7)得 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)+2\varepsilon$, 由于数 $\varepsilon>0$ 任意, 这就证明了 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$.

从而由推论建立了所考虑的泛函 F 存在.

现在, 如果 $x(s)=1$, 则有 $p(x)=1$ 与 $p(-x)=-1$, 又因为 $F(x)\leqslant p(x)$ 和 $F(x)=-F(-x)\geqslant -p(-x)$, 得 $F(x)=1$. 如果 $x(s)\geqslant 0$, 有 $p(-x)\leqslant 0$, 另外 $F(x)=-F(-x)\geqslant -p(-x)$, 因此也有 $F(x)\geqslant 0$.

进一步, 泛函 F 满足下面性质, 对每个数 s_0, 有等式 $F[x(s+s_0)]=F[x(s)]$. 事实上, 如果对 $k=1,2,\cdots$, 令 $y(s)=x(s+s_0)-x(s)$ 和 $\alpha_k=(k-1)s_0$, 则对每个 n 有

$$p(y)\leqslant M(y;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\frac{1}{n}\sup_{-\infty<s<\infty}[x(s+ns_0)-x(s)],$$

故 $p(y)\leqslant 0$; 类似地得 $p(-y)\leqslant 0$. 但是 $F(y)\leqslant p(y)$ 以及 $F(y)=-F(-y)\geqslant -p(-y)$, 由此 $F(y)=0$.

因此, 若利用符号 $\int x(s)ds$ 表示 $\frac{1}{2}\{F[x(s)]+F[x(1-s)]\}$, 则得到下面定理.

对每个 E 类函数 $x(s)$, 按满足下面条件的方式赋予数 $\int x(s)ds$ (其中 $x(s)$ 和

$y(s)$ 是任意 E 类函数，a,b,s_0 是数)：

① $\int[ax(s)+by(s)]ds=a\int x(s)ds+b\int y(s)ds$；

② $\int x(s)ds\geqslant 0$，如果 $x(s)\geqslant 0$；

③ $\int x(s+s_0)ds=\int x(s)ds$；

④ $\int x(1-s)ds=\int x(s)ds$；

⑤ $\int 1ds=1$.

容易验证，满足条件①~⑤的泛函 $\int x(s)ds$ 永远位于函数 $x(s)$ 的上下 Riemann 积分之间. 因此，对每个 R 可积函数，这个泛函与函数的积分重合.

对 L 可和函数，问题中的泛函并不永远与它们的 L 积分相等. 但是，从这样的(L 可和)函数向量空间 G 开始，在 G 中定义泛函 $f(x)$ 为函数 $x(s)\in G$ 的 L 积分，再由 2.2 节定理 1 提供的定义在空间 E 中的泛函 F，使得泛函 $\int x(s)ds=\frac{1}{2}\{F[x(s)]+F[x(1-s)]\}$ 显然满足条件①~⑤，因此，每个 L 可和函数与这个函数的积分重合.

2. 现在考虑问题中圆的周长的所有子集类 $\mathcal{K}$，并以 A_0 记圆周本身. 对这个类的每个集 A，令 $\mu(A)=\int x(s)ds$，其中 $x(s)$ 是集合 A 的特征函数，因此，对在 1 中讨论的函数空间 E，得到定理：

对类 $\mathcal{K}$ 中的每一个集合 A，可指定一个数 $\mu(A)$，使得下面条件满足(其中 A 和 B 是类 $\mathcal{K}$ 中的任意集合)：

① $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$，只要 $A\cap B=\varnothing$；

② $\mu(A)\geqslant 0$；

③ $\mu(A)=\mu(B)$，如果 $A=B$；

④ $\mu(A_0)=1$.

满足条件①~④的泛函 $\mu(A)$ 位于集合 A 的 Jordan 内外测度之间. 因此，对每个 J 可测集，这个泛函与这个集合的测度重合.

对任意 L 可测集，问题中的泛函并不永远与它们的 L 测度重合，但是，正如前面所证，也可以用排列方法使得这个性质成立[①].

3. 设 E 是定义在 $[0,+\infty]$ 上的所有有界实值函数的集合；用通常的代数运算定义，这是一个向量空间.

---

① 参看 S. Banach. Sur le problème de la mesure. Fundamenta Mathematicae, 1923: 7 – 33.

对 E 的每一个元素 $x = x(a)$，以 $p(x)$ 记所有数 $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x(s+\alpha_k)$ 的下确界，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是任意有限正数列. 容易验证，这样定义的空间 E 中的泛函 p 满足推论的假设. 用符号 $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{s\to\infty} x(s)$ 记泛函 F，由推论它存在. 因此，有定理：

对每个函数 $x(s)\in E$，可以赋予数 $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{s\to\infty} x(s)$，使得下面条件满足(其中 $x(s)$ 和 $y(s)$ 是 E 的任意函数，a, b 和 s_0 是数)：

① $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{s\to+\infty}[ax(s)+by(s)] = a\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{s\to+\infty} x(s) + b\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{s\to+\infty} y(s)$；

② $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{s\to+\infty} x(s) \geqslant 0$，只要 $x(s)\geqslant 0$；

③ $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{s\to+\infty} x(s+s_0) = \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{s\to+\infty} x(s)$；

④ $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{s\to+\infty} 1 = 1$.

满足条件①~④的泛函 $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{s\to+\infty} x(s)$ 位于 $\underline{\lim\limits_{s\to\infty}}\, x(s)$ 和 $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\, x(s)$ 之间. 由此得知它与 $\lim\limits_{s\to\infty} x(s)$ 重合，只要这个极限按通常意义下存在. 注意这里的 Lim 表示某个广义“极限”，而 lim 表示通常意义下的极限.

4. 设 $\{\xi_n\}$ 是任一有界序列. 按下面方式在 $(0,+\infty)$ 内定义函数 $x(s)$：$x(s)=\xi_n$ 对 $n-1<s\leqslant n$，$n=1,2,\cdots$. 于是函数 $x(s)$ 属于 3 中讨论的集合 E. 按 3 中的意义，令 $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to\infty}\xi_n = \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{s\to\infty} x(s)$，有定理：

对每个有界序列 $\{\xi_n\}$，可按下面方式赋予数 $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to+\infty}\xi_n$，使得下面条件满足(其中 $\{\xi_n\}$ 和 $\{\eta_n\}$ 是任意有界数列，a 和 b 是数)：

① $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to+\infty}(a\xi_n + b\eta_n) = a\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to+\infty}\xi_n + b\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to+\infty}\eta_n$；

② $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to+\infty}\xi_n \geqslant 0$，如果对 $n=1,2,\cdots$，有 $\xi_n\geqslant 0$；

③ $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to+\infty}\xi_{n+1} = \mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to+\infty}\xi_n$；

④ $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

由条件①~④得知这样定义的泛函 $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n\to\infty}\xi_n$ 永远位于 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,\xi_n$ 和 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,\xi_n$ 之间. 因此，对每个收敛序列，这个泛函与这个序列按通常意义下的极限重合[①].

---

① 参看 S. Mazur, O metodach sumowalności, Ksiega Pamiatkowa l Polskiego Zjazdu Matematycznego (波兰文). Suppément aux Annales de la Soc. Polonsise de Math, 1929：103.

第 3 章　F　空　间

3.1　定义与预备知识

设 E 是满足下面条件的向量空间，也是完备的距离空间，其中的 x, x_n, y 是 E 的元素，h, h_n 是数：

(1)　$d(x,y)=d(x-y,\Theta)$；

(2) 对每个 x，由 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n x = \Theta$；

(3) 对每个 h，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Theta$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} hx_n = 0$.

具有性质(1)~(3)的空间 E 称为 F 空间. 容易看出，引言 B.7 中的距离空间例子 1~10 也都是 F 空间.

由条件(1)~(3)立刻得到下面的极限性质：

a) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

事实上，注意到总有下面关系就够了：

$$
\begin{aligned}
d(x_n+y_n, x+y) &= d(x_n+y_n-x-y,\Theta) \leqslant d(x_n-x+y_n-y, y_n-y)+d(y_n-y,\Theta) \\
&= d(x_n-x,\Theta)+d(y_n-y,\Theta) = d(x_n-x)+d(y_n-y).
\end{aligned}
$$

b) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$，对任何 $x\in E$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n x = hx$，则永远成立 $d(h_n x, hx) = d[(h_n-h)x,\Theta]$.

因此，每个 F 空间同时是 G 空间. 由此得知第 1 章中所有定理当 E 取 F 空间时继续成立.

现在注意到，(向量) F 空间是连通的，因为对 E 中每对 x 和 y，形如 $hx+(1-h)y$ 的元素的集合是包含元素 x 和 y 的连通集，其中 $0\leqslant h\leqslant 1$.

任给 F 空间中一个球(见引言 B.8)，容易看到集合 xK (定义见 1.1 节)也是球.

设 $h\neq 0$，则算子 $U(x)=hx$ 是空间 E 到它自己的连续双射算子，且容易看出它将闭、开、无处稠、I 类纲、II 类纲，以及 E 可测集分别映为同一类型的集合.

特别，有下面的定理，它由 1.2 节定理 2 和 1.2 节的附注，以及每个 F 空间都连通得到.

定理 1　如果 E 是 F 空间，则每个 B 可测且是 II 类纲的线性子空间 $H \subseteq E$ 等于 E.

3.2　齐 次 算 子

现在考虑定义在 F 空间上的加性算子，其值域位于另一个 F 空间 E_1.

对所有的这类算子，第 1 章的定理 3, 4, 5 和 6 继续成立. 此外，如果定义的齐次算子是对所有数 h 满足 $U(rx)=rU(x)$ 的算子 U，则有

定理 2　每一个线性算子也是齐次的.

证明　假设算子 U 是线性的，则显然对每个 $x \in E$ 以及每个有理数 r，$U(rx)=rU(x)$. 现在，如果 $\{r_n\}$ 是趋于 h 的有理数列，有 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n x = hx$. 因此由映射 U 的连续性得到 $U(hx)=\lim\limits_{n\to+\infty} U(r_n x)=\lim\limits_{n\to+\infty} r_n U(x)=h(x)$；从而算子 U 是齐次的.

3.3　元素级数，线性算子的逆

为简单起见,令

$$|x|=d(x,\Theta),$$

容易验证下面的关系对 E 中的所有 x 和 y 都成立：

(1) $d(x,y)=|x-y|$；

(2) $|\Theta|=0$；$x\neq\Theta$ 得 $|x|>0$；

(3) $|-x|=|x|$；

(4) $|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$；

(5) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|x|$.

给定 E 的元素序列 $\{x_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x$，则称级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ 收敛于元素 x，或者说 x 是这个级数的和，记为 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$.

由级数和的定义进一步得知关系：

(6) 由 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ 得 $|x|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|$.

事实上，对每一个 $\varepsilon>0$，存在 n 使得 $|x-\sum_{i=1}^{n}x_i|<\varepsilon$，因此 $|x|\leqslant\varepsilon+|\sum_{i=1}^{n}x_i|\leqslant\varepsilon+\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，因为 ε 任意，故 $|x|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|$.

(7) 如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|$ 收敛，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ 收敛于某个元素(即有和).

事实上，令 $s_n=\sum_{i=1}^{n}x_i$. 如果 $p<q$，则有 $|s_p-s_q|=|\sum_{i=p+1}^{q}x_i|\leqslant\sum_{i=p+1}^{q}|x_i|$. 由此得到 $\lim\limits_{p\to+\infty,q\to+\infty}|s_p-s_q|=0$，因此级数 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ 收敛于每个元素.

这得到了下面将要证明的定理.

定理 3 线性算子的值域或者是 I 类纲集，或者等于整个 E_1.

证明 假设定义在 E 中的线性算子 U 的值域 $E\subseteq E_1$ 是第二类纲集. 先证明：对每一个 $\varepsilon>0$，存在数 $\eta>0$，使得开球 $\{x:|x|<1\}$ 在 U 作用下的像包含开球

$$\{y:|y|<\eta\}. \tag{1}$$

为此，假设给定 $\overline{\varepsilon}>0$，对每个自然数 n，用 G_n 记形如 $x=nx'$ 的点集，其中 $|x'|<\overline{\varepsilon}/2$，以及用 H_n 记 G_n 在 U 作用下的像，即集合 $\{y:y=U(x)$, 对任一 $x\in G_n\}$. 由此得知 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ 和 $H=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n$.

现在，由于假设 H 是第二纲集，对某个 H_{n_0} 同样成立. 设 K_1 是中心在 y_1，半径为 η_1 的包含在 H_{n_0}' 内的开球.

可立刻得知中心在 $\frac{1}{n_0}y_1$，半径为 $\frac{1}{n_0}\eta_1$ 的开球 K_2 包含在 H_1' 内. 事实上，$y\in K_2$，即由 $|y-\frac{1}{n_0}y_1|<\frac{1}{n_0}\eta_1$，得 $n_0y\in K_1$，因为 $|n_0y-y_1|=|n_0\left(y-\frac{1}{n_0}y_1\right)|\leqslant n_0|y-\frac{1}{n_0}y_1|<\eta_1$；因此存在点 $\overline{y}_n\in H_{n_0}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{y}_n=n_0y$，或者 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n_0}\overline{y}_n=y$，即 $\frac{1}{n_0}\overline{y}_n\in H_1$，从而 $y\in H_1'$.

设 K_3 是中心在 $y_3\in H_1$，包含在 K_2 中的任意开球. 于是开球 $\{y:|y|<\overline{\eta}\}$ 的每一点是点 y_3-y 的集的聚点，其中 $y\in H_1$. 现在令 $y_3=U(x_3)$ 和 $y=U(x)$，其中 x_3 和 x 属于 G_1，有 $|x_3-x|\leqslant|x_3|+|x|<\overline{\varepsilon}$ 和 $U(x_3-x)=y_3-y$. 于是建立了包含开球 $\{y:|y|<\overline{\eta}\}$ 的开球 $\{x:|x|<\overline{\varepsilon}\}$ 的像的导集.

设 $\varepsilon_i=\varepsilon/2^i$，对 $i=1,2,\cdots$. 由上，存在数列 $\eta_i>0$，使得开球 $\{x:|x|<\varepsilon_i\}$ 像的导集包含开球 $\{y:|y|<\eta_i\}$，且可自然地假设 $\lim\limits_{i\to\infty}\eta_i=0$. 现在引入两个点列 $\{y_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 如下. 令 $|y|<\eta=\eta_1$，并设

a) y_1 是 E_1 的任意点，使得 $|y-y_1|<\eta_2$，以及 x_1 是 E 的点，使得 $U(x_1)=y_1$ 和 $|x_1|<\varepsilon_1$，

b) y_n 是 E_1 的任意点，使得 $|y-\sum\limits_{k=1}^{n}y_k|<\eta_{n+1}$，以及 x_n 是 E 的点，使得 $U(x_n)=y_n$ 和 $|x_n|<\varepsilon_n$.

因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}y_n=y, \tag{2}$$

又因 $|x_n|<\varepsilon_n=\dfrac{\varepsilon}{2^n}$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{3}$$

由(7)，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛. 设 x 是这个级数的和. 由(3)和(6)，有 $|x|<\varepsilon$，以及由(2)：$U(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}U(x_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n=y$. 命题(1)得证.

现在，由于对每一个 $y\in E_1$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}y=\Theta$，因此存在自然数 n 使得 $\left|\dfrac{1}{n}y\right|<\eta$，可以找到 x 使得 $U(x)=\dfrac{1}{n}y$，因此 $U(nx)=y$. 但是，由此得 $H=E_1$，这是定理所要求的.

定理 4 如果线性算子 U 映 E 到整个 E_1，则对每个收敛于 $y_0=U(x_0)$ 的 E_1 的点列 $\{y_n\}$，存在 E 的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，且使得对 $n=1,2,\cdots$，有 $U(x_n)=y_n$.

证明 设 $\{\varepsilon_n\}$ 是收敛于 0 的正数序列. 由于算子 U 是线性的，由定理 3 建立的命题(1)成立，因此对 $n=1,2,\cdots$，开球 $\{x:|x|<\varepsilon_n\}$ 的像包含开球 $\{y:|y|<\eta_n\}$.

取自然数 m_0，使得对每个 $m>m_0$，不等式 $|y_m-y_0|<\eta_n$ 至少对一个 n 值和对给定的满足 $y_m\neq y_0$ 的 m 成立，其中 n_m 是这些值的最大值. 最后，设 x_m 是由下面条件定义的点：

a) 如果 $m\leqslant m_0$，取 x_m 为满足方程 $U(x_m)=y_m$ 的任意点；

b) 如果 $m > m_0$ 与 $y_m \neq y_0$，取 x_m 为满足相同方程开球 $\{x : |x| < \varepsilon_{n_m}\}$ 的任意点；

c) 如果 $m > m_0$ 与 $y_m = y_0$，取 $x_m = x_0$.

从而，容易验证这样定义的序列 $\{x_n\}$ 满足定理的要求.

定理 5　如果线性算子将 E 双射映为 E_1，则这个算子是双向连续(即它有连续的逆)①.

证明由定理 4 立刻得到.

定理 6　如果向量空间 E 在距离 $d(x,y)$ 和距离 $d_1(x,y)$ 下都是 F 空间，且如果

$$由 \lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0 \quad 永远得 \lim_{n\to\infty} d_1(x_n,x)=0,$$

则相反有

$$由 \lim_{n\to\infty} d_1(x_n,x)=0 \quad 永远得 \lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0,$$

由此得知，极限概念对两个距离是相同的.

证明由定理 5 得知，取 E_1 为以 $d_1(x,y)$ 为距离的空间 E，线性算子 U 为恒同算子，即对 $x \in E$ 有 $U(x)=x$.

定理 7　每个满足条件

$$由 \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 和 \lim_{n\to\infty} U(x_n) = y_0 \quad 得 y_0 = U(x_0)$$

的加性算子都是线性算子.

证明　在 E 中引入由

$$d_1(x',x'') = d(x',x'') + d(y',y'') \tag{4}$$

定义的新距离，其中 $x' \in E$, $x'' \in E$, $y' \in U(x')$, $y'' = U(x'')$，$d(x',x'')$ 是 E 中 x' 到 x'' 之间的原来距离，$d(y',y'')$ 是 E_1 中原来的距离.

容易看到，以 d_1 为距离的空间 E 是 F 空间；特别，为了验证它是完备的，设 $\{x_n\}$ 是满足 $\lim_{p,q\to\infty} d_1(x_p,x_q)=0$ 的点列，由(4)得知 $\lim_{p,q\to\infty} d(x_p,x_q)=\lim_{p,q\to\infty} d(y_p,y_q)=0$，因此存在 x_0 和 y_0 使得 $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=\lim_{n\to\infty} d(y_n,y_0)=0$，又由假设 $y_0 = U(x_0)$，由(4)得 $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n,x_0)=0$.

---

① 这条定理对 Banach 空间情形(参看 5.1 节)在前面 2.2 节的脚注中看到与定理 6 (它是其推论)相同，但证明不一样.

现在，对每个 x' 和 x''，由(4)有 $d_1(x',x'')\geqslant d(x',x'')$；因此由 $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n,x)=0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$．由定理 6 得 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$，另一方面，得 $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n,x)=0$，因此由(4)得 $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n)=U(x)$，由此加性算子连续，证毕.

引理 1 设 U' 和 U'' 是两个分别定义在 F 空间 E' 和 E'' 、值域位于 F 空间 E_1 内的线性算子. 如果对每个 x，方程 $U'(x)=U''(y)$ 恰有一个解 $y=U(x)$，则算子 U 是线性的.

证明由定理 7 得知，因为可立刻看到，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n)=y_0$ 得 $y_0=U(x_0)$.

引理 2 假设加性算子 U 以及使得由 $V(y)=\Theta$ 得 $y=\Theta$ 的线性算子 V 给定，且算子 $V[U(\cdot)]$ 是线性的，则算子 U 也是线性的.

证明由引理 1 得到，因为对每个 x，方程 $V[U(x)]=V(y)$ 允许恰有一个解 $y=U(x)$.

定义 一个线性算子类 $\mathcal{T}$ 称为是全的，如果对每个 $V\in\mathcal{T}$，由 $V(x)=\Theta$ 有 $x=\Theta$.

定理 8 设 U 是从 E 到 E_1 的加性算子，$\mathcal{T}$ 是定义在 E_1 上的全线性算子类. 如果对每个 $V\in\mathcal{T}$，$V[U(\cdot)]$ 是线性算子，则 U 也是线性算子.

证明 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_0$，其中 $y_n=U(x_n)$，对 $n=1,2,\cdots$.

对每个 $V\in\mathcal{T}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} V[U(x_n)]=\lim\limits_{n\to\infty} V(y_n)=V(y_0)$，又因为 $V[U(\cdot)]$ 是线性算子，$\lim\limits_{n\to\infty} V[U(x_n)]=\lim\limits_{n\to\infty} V[U(x_0)]$，故 $V[U(x_0)]-V(y_0)=0$，从而 $V[U(x_0)-y_0]=0$. 又因为类 $\mathcal{T}$ 是全的，$U(x_0)=y_0$. 因而由定理 7，算子 U 是线性的.

定理 9 设 $\{U_i\}$ 和 $\{V_i\}$ 是分别定义在 E' 和 E'' 上的两个线性算子序列，它们的值域位于 F 空间 E_1 内. 如果对每个 x 方程组 $U_i(x)=V_i(y)$ 允许恰有一个解 $y=U(x)$，则算子 U 是线性的.

证明 事实上，假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，以及对对应的序列 $\{y_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_0$. 由算子 $\{U_i\}$ 和 $\{V_i\}$ 的连续性，对 $i=1,2,\cdots$，有 $U_i(x_0)=V_i(y_0)$，因此 $y_0=U(x_0)$，由此，由定理 7 得算子 U 连续.

3.4 连续不可微函数

作为一个应用，现在证明，由 1.3 节定理 4 容易推得，在某个正测度集上处处

没有导数的连续函数的存在性①.

设 C^1 表示所有周期为 1 的连续函数的集合，对 C^1 中的每对函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，令

$$d\left(x_1(t),x_2(t)\right)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_1(t),x_2(t)|.$$

容易看到，这样的 C^1 是 F 空间.

对任意数 $h\neq 0$，令

$$y(t)=\frac{x(t+h)-x(t)}{h},\quad 对\ 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{5}$$

设 S 记可测函数空间(见引言 B)，它是 F 空间(见 3.1 节)，假设 $y(t)\in S$. 于是表达式(5)定义一个定义域是 C^1、值域位于 S 内的线性算子.

假设 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$，其中 $h_n\neq 0$，以及

$$U_n(x)=\frac{x(t+h_n)-x(t)}{h_n},\quad 对\ 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{6}$$

现在，如果每个连续函数几乎处处有导数，当 $n\to\infty$ 时表达式(6)的极限对几乎所有的 t 值存在. 因此，对每个 $x\in C^1$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n(x)$ 可存在，并在空间 S 中有定义，即它按测度有极限. 令 $U(x)=\lim\limits_{n\to\infty}U_n(x)$，得到 B 可测加性算子，由 1.3 节定理 4 它是线性算子. 显然 U 是函数 $x(t)$ 的导数.

从算子 U 的连续性得知，如果一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=0$，则按测度有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'(t)=0$. 但是,对 $x_n(t)=\frac{1}{n}\sin\left(\frac{nt}{2\pi}\right)$，一致地有 $\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=0$，但导数序列 $\left(\frac{1}{n}\cos\left(\frac{nt}{2\pi}\right)\right)$ 按测度不趋于 0. 因此，在正测度集上存在没有导数的连续函数.

3.5 偏微分方程解的连续性

设 $F(x)=0$ 是二阶线性偏微分方程，例如

① S. Banach. Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires. Bull.des Sc. Math. I, 1926：27-32 和 36-43. 所用方法后来被 M. S. Saks 和 M. H. Steinhaus 所发展：Qui l'ont employee pour traiter divers problemes de la Théorie des fonctions (参看 S.Saks. Fund. Math. X：186-196 和 H. Steinhaus. Stud. Math. I：51-81).

$$F(x)=a_1\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+a_2\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+a_3\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+a_4\frac{\partial x}{\partial u}+a_5\frac{\partial x}{\partial v}+a_6 x=0, \tag{7}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,6)$ 是以单闭曲线 C 为边界的闭区域 $\overline{G}$ 上变量 u 和 v 的连续函数.

可能在某些边界条件下, 方程(7)在 $\overline{G}$ 内总有唯一解 $x(u,v)$, 它在 $\overline{G}$ 内连续且有出现在(7)中的偏导数, 即在 $\overline{G}$ 的内部 G 有一阶和二阶偏导数.

在这些假设下, 边界条件可以自由变化. 例如, 解在曲线 C 上给定(椭圆型), 或者可在边界的一部分指定(双曲型或者抛物型), 或者沿着 C 的法向导数被给定等.

现在假设, 以 t 表示描述曲线 C 的参数, 对每个函数 $\xi(t)$ 以及它直到 r 阶的所有导数连续, 方程(7)允许其解 $x(u,v)$ 在 C 上等于函数 $\xi(t)$.

有了这些规定, 下面证明:

如果序列 $\{\xi_n(t)\}$ 满足加在 $\xi(t)$ 上的条件, 并且如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n(t)=0$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^{(i)}(t)=0$ 对 $i=1,2,\cdots,r$ 一致成立, 则若 $\{x_n(u,v)\}$ 表示方程 $F(x)=0$ 对应的解序列, 那么在 $\overline{G}$ 上一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(u,v)=0$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}(\partial^2 x_n/\partial u^2)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\partial^2 x_n/\partial v^2)=0$ 等(即对出现在(7)中的所有偏导数, 在含在 G 中的每一个闭区域上一致成立).

为了证明上述命题, 用 E 记所有满足(7)在 $\overline{G}$ 上连续的函数 $x(u,v)$ 以及在 G 内其前二阶偏导数(即出现在(7)中的函数)都连续的集合. 设 $(\overline{G}_n)$ 是 G 中的闭区域序列, 使得 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}G_k$. 对每一对 $x(u,v)\in E$ 和 $y(u,v)\in E$, 令

$$d(x,y)=\max_{u,v\in G}|x(u,v)-y(u,v)|+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\max\limits_{u,v\in \overline{G}_k}\left|\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right|+\cdots}{1+\max\limits_{u,v\in\overline{G}_k}\left|\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right|+\cdots},$$

其中级数每一个项中的所有偏导数之差均出现在(7)中.

因此, 距离空间 E 组成 F 空间, 且在这个距离下 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 这意味着 x_n 在 $\overline{G}$ 上一致趋于 x, 出现在(7)中的偏导数 $\dfrac{\partial^2 x_n}{\partial u^2},\cdots$,在每个闭集 $\overline{G}_k$ ($k=1,2,\cdots$)上一致趋于函数 x 对应的偏导数.

设 E_1 是函数 $\xi(t)$ 的集合, 其中 t 描述曲线 C, 它与它前 r 阶导数连续. 对每一

对 $\xi(t)\in E_1$ 和 $\eta(t)\in E_1$，令

$$d(\xi,\eta)=\max_{t\in C}|\xi(t)-\eta(t)|+\sum_{i=1}^{r}\max_{t\in C}|\xi^{(i)}(t)-\eta^{(i)}(t)|.$$

现在以 $\xi=U(x)$ 记定义在 E 中限制在 C 上的算子，即对每个函数 $x=x(u,v)\in E$，函数 $\xi=\xi(t)$ 是 $x(u,v)$ 在 G 的边界 C 上的限制. 因此，定义的算子 U 显然是加性和连续的.

现在，由于算子 U 的值域是 F 空间，由假设逆算子 U^{-1} 存在，由 3.3 节定理 5，它连续，由此得知命题得证.

附注 如果去掉方程(7)的解的唯一性假设，则只可能得到下面结论(由 3.3 节定理 4)：$\{\xi_n(t)\}$ 的意义如前，存在满足(7)的函数序列 $\{x_n(u,v)\}$，它限制在 C 上的函数是 $\xi_n(t)$，且使得在 $\bar{G}$ 上一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(u,v)=0$，且对包含在 G 内的每一个闭区域一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\partial^2 x_n}{\partial u^2}=0,\cdots$.

3.6 无穷多个未知数的线性方程组

设 $\{a_{ik}\}$，$i=1,2,\cdots$；$k=1,2,\cdots$，是任意排列的实数(二重)序列，E_1 是 F 空间，它的元素是数列.

定理 10 如果对每个序列 $y=\{\eta_i\}\in E_1$，方程组

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k=\eta_i,\quad 对\ i=1,2,\cdots, \tag{8}$$

总有唯一解 $\{\xi_k\}$，则存在定义在 E_1 中的线性泛函 $\xi_k=f_k(y)$，对 $k=1,2,\cdots$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}f_k(y)=\eta_i,\quad 对每个\ y\in E_1\ 和\ i=1,2,\cdots.$$

证明 以 E 记满足下面条件的所有序列 $x=\{\xi_k\}$ 的集合：

a) 对每个 $i=1,2,\cdots$，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k$ 收敛；

b) 序列 $\{\eta_i\}=\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k\right\}$ 属于 E_1.

对 E 中的每对元素 $x'=\{\xi_k'\}$ 和 $x''=\{\xi_k''\}$，令

$$d_i(x',x'')=\sup_{n\geqslant 1}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\xi'_k-\xi''_k)\right|\right),$$

$d_0(x',x'')$定义为E_1中两个序列$\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi'_k\right)$和$\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi''_k\right)$之间的距离，以及由下面公式定义$E$中的距离$d(x',x'')$：

$$d(x',x'')=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{d_i(x',x'')}{1+d_i(x',x'')}.$$

注意到

对每个$k=1,2,\cdots$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\Theta$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=0$，其中$x_n=\{\xi_k^{(n)}\}\in E$． (9)

事实上，由方程(8)的解的唯一性，第k列至少包含一项$a_{ik}\neq 0$．假设

$$a_{i_k k}\neq 0,\quad 对k=1,2,\cdots, \tag{10}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\Theta$，有$\lim\limits_{n\to\infty}d_{i_1}(x_n,\Theta)=0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_1^{(n)}=0$，由于(10)给出$a_{i_1 1}\neq 0$，由归纳法容易证明，一般地对每个自然数$k$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=0$．

如此，由命题(9)可以证明E是完备的向量空间．

为此，假设序列$\{x_n\}$满足条件$\lim\limits_{p\to\infty,q\to\infty}(x_p,x_q)=0$，其中$x_n=\{\xi_k^{(n)}\}$．因此，$\lim\limits_{p\to\infty,q\to\infty}d(x_p,x_q)=0$，由此由(9)有$\lim\limits_{p\to\infty,q\to\infty}(\xi_k^{(p)}-\xi_k^{(q)})$，对$k=1,2,\cdots$，由此得知对每个自然数$k$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$存在．设$x=\{\xi_k\}$．容易验证$x\in E$，以及对$i=0,1,\cdots$，有$\lim\limits_{n\to\infty}d_i(x_n,x)=0$．因此，$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$，从而空间$E$按所期望是完备的．

由此得知E是F空间．

设

$$y=U(x),$$

对每对序列$x=\{\xi_k\}\in E$和$y=\{\eta_i\}\in E_1$，这就建立了它们满足方程组(8)．立刻看到

$$d(y,\Theta)=d_0(x,\Theta)\leqslant d(x,\Theta), \tag{11}$$

其中 $d(y,\Theta)$ 理解为 E_1 中的距离，$d(x,\Theta)$ 为 E 中的距离.

由(11)和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\Theta$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n)=\Theta$. 所以算子 U 是线性的，且由于它将 E 双射映到 E_1，由 3.3 的定理 5，逆算子 U^{-1} 也是线性的. 因此，如果对 $k=1,2,\cdots$,令 $\xi_k=f_k(y)$，其中 $x=U^{-1}(y)=\{\xi_k\}$，可看到 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\Theta$，其中 $x_n=U^{-1}(y_n)=\{\xi_k^{(n)}\}$，得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\Theta$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=0$. 从而加性泛函 f_k 是 E 中的线性泛函，证毕.

由这条定理，将看到下面的定理成立[①].

如果方程组(8)对每个属于下面空间的序列 $\{\eta_i\}$：

(1) 收敛于 0 的序列空间 c_0；

(2) 空间 s；

(3) 空间 l；

(4) 空间 l^p，其中 $p>1$，

恰有一个解，则存在数组 $\{b_{ki}\}$，使得

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}\eta_i,\quad 对\ k=1,2,\cdots,$$

其中序列 $\{\xi_k\}$ 和 $\{\eta_i\}$ 满足方程组(8)，且分别满足条件：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|b_{ki}|<\infty$，对 $k=1,2,\cdots$；

(2) 每行最终为零(即存在自然数列 $\{n_k\}$，使得对每个 $i>n_k$，有 $b_{ki}=0$)；

(3) $|b_{ki}|<m_k$，对 $i=1,2,\cdots$，和某序列 $\{m_k\}$；

(4) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|b_{ki}|^{p/(p-1)}<\infty$，对 $k=1,2,\cdots$.

附注　如果假设方程组(8)对每个收敛数列 $\{\eta_i\}$ (不必要收敛于 0)恰有一个解，则存在数列 $\{c_k\}$ 和满足(1)的数组 $\{b_{ki}\}$，使得

$$\xi_k=c_k\lim_{i\to\infty}\eta_i+\sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}\eta_i,\quad 对\ k=1,2,\cdots.$$

所有这些定理都可从这一节开始建立的一般定理(3.6 节)在每个特殊空间用适当的线性泛函表示得到(见下面的定理以及 4.4 节中的定理).

---

① 情形(4)是 F. Riesz 知道的，参看 Les systèmes d'équations linèaires a une infinitèè d'inconnues. Paris, 1913.

3.7 空间 s 的应用

下面建立数列空间 s (见引言 B.7, (2))中线性泛函的一般形式.

定理 11 定义在 s 空间中的每一个线性泛函 f 的形式是

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}a_i\xi_i, \tag{12}$$

其中 N 是依赖于 f 的自然数.

证明 设 $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$，其中对 $i\neq n$ 有 $\xi_i^{(n)}=0$，以及 $\xi_n^{(n)}=1$. 令 $f(x_n)=a_n$. 对每个序列 $x=\{\xi_n\}$，有 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n x_n$，因此 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n f(x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\xi_n$. 现在，由于这个级数对任何序列 $\{\xi_n\}$ 收敛，故存在自然数 N，使得对每个 $n>N$ 有 $a_n=0$，从而得到 f 的形式(12).

M. O. Toeplitz[①]建立了下面的定理：

定理 12 存在满足方程组(8)的数列 $\{\xi_k\}$ 的充分必要条件是，对每个有限数列 $h_1,h_2,\cdots,h_r$，由条件 $\sum_{i=1}^{r}h_i a_{ik}=0$ 得等式 $\sum_{i=1}^{r}h_i\eta_i=0$，其中 $k=1,2,\cdots$.

特别，如果由条件 $\sum_{i=1}^{r}h_i a_{ik}=0$，得 $h_1=h_2=\cdots=h_r=0$，这里 $k=1,2,\cdots$，则对任何序列 $\{\eta_i\}$，方程(8)有一个解.

现在证明

定理 13 如果对任何序列 $y=\{\eta_i\}$，方程组(8)恰有一个解，则对每个自然数 i，存在自然数 N_i，使得对每个 $k>N_i$，有 $a_{ik}=0$.

证明 对 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k=\eta_i$，这里 $i=1,2,\cdots$,令 $\xi_k=f_k(y)$. 由定理 10，f_k 是定义在实数序列空间(见引言 B.7)上的线性泛函. 因此对每个自然数 k，存在有限数列 $\alpha_{1k},\alpha_{2k},\cdots,\alpha_{N_k k}$ 使得

$$f_k(y)=\sum_{i=1}^{N_k}\alpha_{ik}\eta_i=\xi_k. \tag{13}$$

---

① M.O. Toeplitz. Über die Auflösung unendlich vieier linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Rendiconti del Circ.Mat. di Pallermo XXVIII, 1909：88-96.

此外，方程组(13)是线性无关的.

事实上，假设相反，则存在有限数列 $h_1,h_2,\cdots,h_r$，使得 $\sum_{k=1}^{r} h_k a_{ik}=0$，其中 $i=1,2,\cdots$. 因此，由(13)有

$$\sum_{k=1}^{r} h_k \xi_k=\sum_{k=1}^{r} h_k f_k(y)=0,\quad \text{对每个序列 } y=\{\eta_i\}. \tag{14}$$

对某个 $j\leqslant r$，令 $\eta_i^0=a_{ij}$，其中 r 是任意固定的自然数，得知对应方程组(8)的解 $\{\xi_k^0\}$，对 $k\neq j$ 有 $\xi_j^0=1$ 以及 $\xi_k^0=0$. 将这些值代入(14)得 $h_j=0$；从而，所有系数 h_k 都为零，这就证明了方程组(13)线性无关.

由 3.7 定理 12 得知，对每个序列 $\{\xi_k\}$，存在满足方程(13)的数列 $\{\eta_i\}$；对每个序列 $\{\xi_k\}$，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k$ 收敛. 由此得知，对每个 $i=1,2,\cdots$，存在 N_i 满足定理的要求.

附注 如果去掉恰好存在一个解的假设，那么定理就不再成立.

事实上，对任意序列 $\{\eta_j\}$，存在定义具有实系数 ξ_k 的幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k z^k$ 的整函数，使得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k j^k=\eta_j,\quad 其中 j=1,2,\cdots.$$

因此，这个方程组对每个序列 $\{\eta_i\}$ 有解；这个解显然不唯一，因为存在不恒等于 0 的由幂级数给定的整函数，使得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k j^k=0,\quad 其中 j=1,2,\cdots.$$

第4章 赋范空间

4.1 赋范向量空间和Banach空间的定义

向量空间E称为是赋范的，如果在E上存在称为范数的泛函，记为$|x|$，或者更通常记为$\|x\|$，它满足条件：

① $\|\Theta\|=0$且$\|x\|>0$，如果$x\neq\Theta$；

② $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；

③ $\|tx\|=|t|\cdot\|x\|$，对每个数量t.

如果用公式

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

定义E中两个元素x和y之间的距离，显然可得到一个距离空间．此外，如果它是完备的，即回忆(见引言 B.7)当序列$\{x_p\}$满足$\lim\limits_{p,q\to\infty}\|x_p-x_q\|=0$时，存在$x\in E$使得$\lim\limits_{p\to\infty}\|x_p-x\|=0$，则称此空间为$B$型空间，即 Banach 空间，或者$B$空间[①](译者注).

显然每一个B空间是F空间，但反之不成立．例如在引言中列举的空间例子都是F空间，也是B空间，但s空间和S空间是例外.

4.2 线性算子的性质、线性泛函的扩张

首先讨论赋范空间E，它不必完备.

定理 1 定义在向量空间$G\subseteq E$上的加性算子U是线性算子的充分必要条件是，存在数M，满足

$$\|U(x)\|\leqslant M\|x\|,\quad 对一切\ x\in G.$$

证明 这个条件是必要的．事实上，如果这样的M不存在，则存在满足$\|U(x_n)\|>M_n\|x_n\|$的序列$\{x_n\}$，其中$M_n\to+\infty$．令$Y_n=\dfrac{1}{M_n\|x_n\|}\cdot x_n$，由此，有

① 在 Fund . Math. III, 1922：133-181 我的工作中第一次对B空间的一般形式进行了讨论.

$\|Y_n\|=\dfrac{1}{M_n}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=\Theta$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}U(Y_n)=0$．这是不可能的，因为 $\|U(Y_n)\|=\dfrac{1}{M_n\|x_n\|}\cdot\|U(x_n)\|>1$.

这个条件也是充分的. 事实上, 对任何序列 $\{x_n\}\subseteq G$ 以及 $x\in G$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|=0$，最后得 $\lim\limits_{n\to\infty}U(x_n)=U(x)$，证毕.

对定义在向量空间 $G\subseteq E$ 上的给定线性算子 U，G 中算子 U 的范数是满足条件(1)的最小数, 记为 $\|U\|_G$．如果 $G=E$，就简单地用 $\|U\|$ 代替 $\|U\|_E$．于是对每个 $x\in G$ 有 $\|U(x)\|\leqslant\|U\|_G\cdot\|x\|$，容易看到

$$\|U\|_G=\sup\{\|U(x)\|:x\in G,\|x\|\leqslant 1\}.$$

附注 在现代泛函分析术语中, 线性算子 U 一般并不一定是连续的. 如果它连续, 或者等价地, 如果 $\|U\|<\infty$，则称 U 是连续算子或者有界线性算子(英译者注).

问题是, 对每个赋范向量空间是否存在定义在这个空间上的不恒等于零的(连续或有界—英译者注)线性泛函. 从下面的定理得知, 回答是肯定的. 它是2.2节定理 1 的推论[①].

定理2 假设 f 是定义在向量空间 $G\subseteq E$ 上的(有界)线性泛函, 则存在定义在 E 上满足条件

$$F(x)=f(x),\quad x\in G \text{ 和 } \|F\|=\|f\|_G$$

的线性泛函 F．

证明只需在第 2 章的定理 1 中令 $p(x)=\|x\|\cdot\|f\|_G$.

定理 3 对每个 $x_0\in E$, $x_0\neq\Theta$，存在定义在 E 上满足

$$F(x_0)=\|x_0\| \text{ 和 } \|F\|=1$$

的线性泛函 F．

证明只需利用上面的定理 2, 取 $G=\{hx_0:h \text{ 是数}\}$，并令 $f(hx_0)=h\cdot\|x_0\|$.

特别, 由此结果得知在每个赋范向量空间中存在不恒等于零的连续线性泛函.

---

① 定理2-6 可在 M. H. Hahn. Über lineare Gleichungen in linearen Räumen. Journ. Für reine u. angew. Math, 1927, 157：214-229 中找到；也可参看 S. Banach. Sur les fonctionnelles linéaires. Stud. Math. I, 1929：211-216, 特别是定理 2 和附注.

定理 4　设 f 是定义在集 $G \subseteq E$ 上的任意泛函，则存在定义在 E 上且满足条件

(1) $f(x) = F(x)$, 对 $x \in G$；

(2) $\| F \| \leqslant M$，对某给定的数 $M > 0$

的线性泛函 F 的充分必要条件是，不等式

$$\left| \sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i) \right| \leqslant M \cdot \left\| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i \right\|$$

对 G 的元素的每个有限序列 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 和对每个实数的有限序列 $h_1, h_2, \cdots, h_r$ 成立[①].

证明　条件是必要的. 事实上，有

$$\left| F\left(\sum_{i=1}^{r} h_i x_i \right) \right| \leqslant \| F \| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i \right\|,$$

因此，由(2)有

$$\left| \sum_{i=1}^{r} h_i F(x_i) \right| \leqslant M \cdot \left\| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i \right\|.$$

又因为对每个 $x_i \in G$ 由(1)有 $F(x_i) = f(x_i)$，得所要的不等式.

条件是充分的. 事实上，设 H 是元素形如 $z = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i$ 的向量空间，其中 r 是实数, h_i 是任意数，以及 $x_i \in G$. 令 $\varphi(z) = \sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i)$.

对 $z = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i = \sum_{i=1}^{r} h_i' x_i'$，由假设有

$$\left| \sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i) - \sum_{i=1}^{r} h_i' f(x_i') \right| \leqslant M \cdot \left\| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i - \sum_{i=1}^{r} h_i' x_i' \right\| = 0.$$

因此泛函 φ 在 H 上有定义，容易看出它在其中是加性的. 此外，

---

① 对某些特殊空间，这条定理是由 F. Riesz 得到的(Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math.Ann., 1910, 69:449-497)，更一般形式是由 E. Helly 得到的(Über lineare Funktionaloperrationen. Wiener Berichte, 1912, 121: 265-297).

$|\varphi(z)|=\left|\sum_{i=1}^{r}h_i f(x_i)\right|\leqslant M\cdot\left|\sum_{i=1}^{r}h_i x_i\right|$，故$\|\varphi\|_M\leqslant M$．于是由4.2节定理2得知在$E$中具有性质(1)和(2)的泛函$F$存在，其中令$f=\varphi$以及$G=H$．

特别，如果G是E的元素序列$\{x_n\}$，$\{c_n\}$是泛函f值对应的序列，即$c_n=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，于是有

定理5　在E中存在满足条件

(1) $F(x_n)=c_n$，$n=1,2,\cdots$；

(2) $\|F\|\leqslant M$

的线性泛函F的充分必要条件是，对每个有限实数序列$h_1,h_2,\cdots,h_r$，不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{r}h_i c_i\right|\leqslant M\cdot\left\|\sum_{i=1}^{r}h_i x_i\right\|$$

成立．其中$M>0$为某给定数，$\{x_n\}$为E中元素的给定序列，$\{c_n\}$为给定的实数序列．

4.3　基本集和全集

下面建立赋范空间理论中的几个定理，其作用类似于实变函数理论中用多项式逼近连续函数的Weierstrass定理．

引理　给定向量空间$G\subseteq E$以及E中的元素y_0，它与G的距离是$d>0$，则在E中存在满足下面条件的线性泛函F：

① $F(y_0)=1$;

② $F(x)=0$对$x\in G$；

③ $\|F\|=\dfrac{1}{d}$.

证明　设H是形如

$$x=x'+\alpha y_0,\quad \alpha\text{是任意实数},\quad x'\in G$$

的元素的集合．因此，H显然是一个线性空间，且由于$d>0$，$x\in H$的表达式是唯一确定的.对表达式中的x由$f(x)=\alpha$定义了H中的线性泛函f．由于$\|x\|=\|x'+\alpha y_0\|=|\alpha|\cdot\|\frac{1}{\alpha}x+y_0\|\geqslant|\alpha|\cdot d$，得知$|f(x)|=|\alpha|\leqslant\frac{1}{d}\|x\|$，因此$\|f\|_H\leqslant\frac{1}{d}$．此外，如果$\{x_n\}\subseteq G$且$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_0\|=d$，于是$|f(x_n-y_0)|=1\leqslant$

$\|x_n - y_0\| \cdot \|f\|_G$，由此$1 \leqslant d \cdot \|f\|_G$，故$\frac{1}{d} \leqslant \|f\|_H$，因此$\|f\|_H = \frac{1}{d}$.

由此得到，由于定理 2，用H代替G，存在定义在E中的线性泛函F，使得对$x \in H$有$F(x) = f(x)$且$\|F\| = \|f\|_H = \frac{1}{d}$（条件③），因此，特别，$F(x) = 0$，对$x \in G$（条件②），以及$F(y_0) = 1$（条件①），证毕.

定理 6 对任何子集$G \subseteq E$和E中的任意元素y_0，存在满足$\lim\limits_{n\to\infty} g_n = y_0$的$G$的元素的线性组合序列$\{g_n\}$[①]的充分必要条件是：对$x \in G$，由$f(x) = 0$，对任何（有界）线性泛函$f$有$f(y_0) = 0$.

证明 条件是必要的，因为对每个$x \in G$，由$f(x) = 0$，得$f(g_n) = 0$，$n = 1, 2, \cdots$，因此$f(\lim\limits_{n\to\infty} g_n) = f(y_0) = 0$.

由上面引理这个条件也是充分的，如果将引理中的"G"理解为在这里考虑的集合G的元素的所有线性组合的集合.

集合$G \subseteq E$称为基本的，如果G的元素的所有线性组合的集合在E中稠. 称它是全集，如果每个在G上等于零的（有界）线性泛函在整个E上等于零.

由定理 6 容易得到

定理 7 集合$G \subseteq E$是基本的，当且仅当它是全的.

线性泛函f称为与元素x_0正交，如果$f(x_0) = 0$；称它与G正交，如果对每个$x \in G$有$f(x) = 0$.

由此节引理得知，对每一个真闭线性子空间$G \subset E$，$G \neq E$，在E中存在不恒等于零且与G正交的连续线性泛函.

4.4 空间 C, L^r, c, l^r, m 以及空间 m 的子空间中的有界线性泛函的一般形式

现在来建立某些特殊赋范空间中有界线性泛函的一般形式[②].

1. 空间 C. 由于定义在$[0,1]$上（本质）有界可测函数的空间M[③]上的范数与连续函数空间C上的重合，因此可以将C视为M的向量子空间.

给了定义在C上的有界线性泛函f，由 4.2 节定理 2 存在定义在M上满足下面条件的线性泛函F：

---

① 这个概念的定义见 2.1 节.

② 参看引言 B.7 例 4, 5, 6, 8,和 9.

③ 见引言 B.7 的(3).

$$F(x)=f(x)，\text{对每个 } x\in C; \tag{1}$$

$$\|F\|_M=\|f\|_C. \tag{2}$$

令

$$\xi_t=\xi_t(u)=\begin{cases}1, & \text{对 } 0\leqslant u\leqslant t,\\ 0, & \text{对 } t\leqslant u\leqslant 1\end{cases}$$

和

$$F(\xi_t)=g(t). \tag{3}$$

下面证明 $g(t)$ 是有界变差函数. 设 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 且 $\varepsilon_i=\operatorname{sign}[g(t_i)-g(t_{i-1})]$，对 $i=1,2,\cdots,n$. 有

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)-g(t_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\{g(t_i)-g(t_{i-1})\}\varepsilon_i$$
$$=F\left[\sum_{i=1}^{n}\{\xi_{t_i}-\xi_{t_{i-1}}\}\varepsilon_i\right]\leqslant\|F\|_M\cdot\left\|\sum_{i=1}^{n}\{\xi_{t_i}-\xi_{t_{i-1}}\}\varepsilon_i\right\|,$$

容易看出这个和的范数等于 1. 由此得知，与(2)在一起有

$$\operatorname*{var}_{0\leqslant t\leqslant 1}g(t)\leqslant\|F\|_M=\|f\|_C, \tag{4}$$

由此，设 $x(t)\in C$ 且

$$z_n=z_n(u)=\sum_{r=1}^{n}x\left(\frac{r}{n}\right)\cdot\left\{\xi_{\frac{r}{n}}(u)-\xi_{\frac{r-1}{n}}(u)\right\}. \tag{5}$$

因此函数 $z_n(u)$ 分别在区间 $\left(\frac{r-1}{n},\frac{r}{n}\right]$ 中取值 $x\left(\frac{r}{n}\right)$. 由于函数 $x=x(u)$ 连续，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-z_n\|=0$，因此由(1)有

$$\lim_{n\to\infty}F(z_n)=F(x)=f(x). \tag{6}$$

此外，由等式(3)和(5)得

$$F(z_n)=\sum_{r=1}^{n}x\left(\frac{r}{n}\right)\cdot\left[g\left(\frac{r}{n}\right)-g\left(\frac{r-1}{n}\right)\right].$$

因此，由于$x(t)\in C$而$g(t)$是有界变差函数，$\lim\limits_{n\to\infty}F(z_n)=\int_0^1 x(t)dg$，从而，由(6)有

$$f(x)=\int_0^1 x(t)dg\text{，}\quad 对\ x(t)\in C\text{.}\tag{7}$$

又

$$|f(x)|=\left|\int_0^1 x(t)dg\right|\leqslant \operatorname*{var}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t),$$

由(4)，令$\|f\|=\|f\|_C$，有

$$\operatorname*{var}_{0\leqslant t\leqslant 1} g(t)=\|f\|.$$

因此得定理[①]：

每个定义在空间C中的(有界)线性泛函有形式

$$f(x)=\int_0^1 x(t)dg,$$

其中$g(t)$是与$x(t)$无关的变差为$\|f\|$的函数.

反之，给定一个有界变差函数$g(t)$，公式(7)显然在C上定义了一个有界线性泛函.

2. 空间L^r，其中$r\geqslant 1$．给定一个定义在空间L^r上的有界线性泛函f，令

$$\xi_t=\xi_t(u)=\begin{cases}1, & 对\ 0\leqslant u\leqslant t,\\ 0, & 对\ t\leqslant u\leqslant 1,\end{cases}$$

以及

$$f(\xi_t)=g(t).$$

证明$g(t)$是绝对连续函数.

事实上，设$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$是端点分别为$t_i$和$t_i'$的不交叠区间，其中$t_i<t_i'$，$i=1,2,\cdots,n$．令$\varepsilon_i=\operatorname{sign}[g(t_i')-g(t_i)]$，有

① 这条定理的第一次证明是由 F. Riesz 给出的 (Sur les operations fonctionnelles linèaires. Comptes-Rendus de l'Acad. Des Sc, 1909, 149: 974-977).

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i')-g(t_i)|=\sum_{i=1}^{n}\{g(t_i')-g(t_i)\}\varepsilon_i$$

$$=f\left(\sum_{i=1}^{n}\{\xi_{t_i'}-\xi_{t_i}\}\varepsilon_i\right)\leqslant\|f\|\cdot\left\|\sum_{i=1}^{n}\{\xi_{t_i'}-\xi_{t_i}\}\varepsilon_i\right\|, \tag{8}$$

由于函数 $(\xi_{t_i'}-\xi_{t_i})\varepsilon_i$ 在区间 δ_i 内取值 $\varepsilon_i=\pm1$，并在其他地方为零，由假设区间 δ_i 不交叠，得

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(\xi_{t_i'}-\xi_{t_i})\varepsilon_i\right\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|\right)^{\frac{1}{r}},$$

其中 $|\delta_i|$ 表示 δ_i 的长度. 于是由(8)有

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i')-g(t_i)|\leqslant\|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|\right)^{\frac{1}{r}},$$

这证明了 $g(t)$ 的绝对连续性.

令 $g'(t)=\alpha(t)$，这建立了函数 $\alpha(t)$ 是可积的，由于 $\xi_0=0$，显然有 $f(\xi_t)=\int_0^t\alpha(t)dt$，因此

$$f(\xi_t)=\int_0^1\xi_t(u)\alpha(u)du. \tag{9}$$

设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意数，$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$，以及对 $t_{i-1}\leqslant t<t_i$ 和 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $x(t)=c_i$. 显然，$x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(\xi_{t_i}-\xi_{t_{i-1}}\right)$，因此，由(9)有

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt. \tag{10}$$

从而，对每个阶梯函数 $x(t)$ 等式(10)成立.

现在如果 $x=x(t)$ 是任意有界可测函数，存在几乎处处收敛于 $x(t)$ 的一致有界的阶梯函数序列 $\{x_n(t)\}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|x_n(t)-x(t)|^r dt=0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$. 又由(10)有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt = \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt,$$

从而等式(10)对每个有界可测函数 $x(t)$ 成立.

现在考虑情形 $r>1$. 令

$$x_n(t) = \begin{cases} |\alpha(t)|^{s-1}\operatorname{sign}\alpha(t), & \text{如果 } |\alpha(t)|^{s-1}\leqslant n, \\ n\operatorname{sign}\alpha(t), & \text{如果 } |\alpha(t)|^{s-1} > n, \end{cases}$$

其中 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$. 有 $|f(x_n)| = \left|\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt\right| \leqslant \|f\|\left(\int_0^1 |x_n(t)|^r\, dt\right)^{\frac{1}{r}}$, 且由于 $x_n(t)\alpha(t) =$ $|x_n(t)|\cdot|\alpha(t)| \geqslant |x_n(t)|\cdot|x_n(t)|^{\frac{1}{s-1}}$, 有

$$\int_0^1 |x_n(t)|^{\frac{s}{s-1}}\, dt \leqslant \|f\|\cdot\left(\int_0^1 |x_n(t)|^r\, dt\right)^{\frac{1}{r}},$$

由此, 由于 $\frac{s}{s-1}=r$, 得

$$\left(\int_0^1 |x_n(t)|^r\, dt\right)^{1-\frac{1}{r}} \leqslant \|f\|.$$

由于这个不等式对每个自然数 n 成立, 又由于 $|x_n(t)|^r \leqslant |\alpha(t)|^{rs-r} = |\alpha(t)|^s$, 以及几乎处处有 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n(t)|^r = |\alpha(t)|^s$, 得到

$$\left(\int_0^1 |\alpha(t)|^s\, dt\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \|f\|. \tag{11}$$

由此得知, $\alpha(t)$ 是 r 次方可和函数. 因此, 如果 $x(t)$ 是任何可测的 r 次方可和函数, 乘积 $x(t)\alpha(t)$ 是可积函数.

现在定义函数序列 $\{x_n(t)\}$ 如下:

$$x_n = x_n(t) = \begin{cases} x(t), & \text{对 } |x(t)|\leqslant n, \\ n\operatorname{sign} x(t), & \text{对 } |x(t)| > n. \end{cases} \tag{12}$$

于是有

$$\| x-x_n \| = \left(\int_0^1 | x(t)-x_n(t) |^r \, dt \right)^{\frac{1}{r}} \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} \| x-x_n \| = 0, \tag{13}$$

由此得知

$$\left| \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt - f(x_n) \right| = \left| \int_0^1 [x(t)-x_n(t)]\alpha(t)dt \right|$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 | x(t)-x_n(t) |^r \, dt \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_0^1 | \alpha(t) |^s \, dt \right)^{\frac{1}{s}}.$$

再利用(13), $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt$, 且由于

$$| f(x) | = \left| \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt \right| \leqslant \left(\int_0^1 | \alpha(t) |^s \, dt \right)^{\frac{1}{s}} \cdot \| x \|,$$

由(11)得到

$$\| f \| = \left(\int_0^1 | \alpha(t) |^s \, dt \right)^{\frac{1}{s}}.$$

从而证明了下面的定理[①]:

每个定义在空间 $L^p(p>1)$ 上的有界线性泛函 f 的形式是

$$f(x) = \int_0^1 s(t)\alpha(t)dt,$$

其中 $\alpha(t) \in L^p$ 以及 $\| f \| = \left(\int_0^1 | \alpha(t) |^s \right)^{\frac{1}{s}}$.

现在考虑 $s=1$ 的情形. 假设 $0 \leqslant u < u+h \leqslant 1$, 并令

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}, & \text{对 } u \leqslant t \leqslant u+h, \\ 0, & \text{对 } 0 \leqslant t < u \text{ 和 } u+h < t \leqslant 1. \end{cases}$$

① 这条定理对 $r=2$ 是 M. Frechet 建立的 (Sur les ensembles de fonctions et les opèrations linéaires. Comples Rendus de l'Acad. Des Sc, 1907, 144: 1414-1416). 一般情形由 F. Riesz. 同上. Math. Ann., 1910, 69: 475.

由(10)有 $|f(x)|=|\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,dt|=\frac{1}{h}\left|\int_u^{u+h}\alpha(t)\,dt\right|$，以及由于 $|f(x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|=\|f\|\cdot 1$，得知 $\left|\int_u^{u+h}\alpha(t)dt\right|\leqslant\|f\|\cdot h$. 因此函数 $g(u)=\int_0^u\alpha(t)dt$ 满足 Lipschitz 条件，且由于几乎处处有 $g'(t)=\alpha(t)$，可得到

$$|\alpha(t)|\leqslant\|f\|,\quad \text{几乎处处成立.}\tag{14}$$

如果 $x=x(t)$ 是任意可积函数，$\{x_n(t)\}$ 是如(12)定义的函数序列，则有

$$\|x-x_n\|=\int_0^1|x(t)-x_n(t)|\,dt\to 0,$$

因此

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt,$$

因为 $|x_n(t)\alpha(t)|\leqslant|x(t)\alpha(t)|$. 由于

$$\left|\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt\right|\leqslant\int_0^1|x(t)|\,dt\cdot\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 1}|\alpha(t)|,$$

又由(14)得到不等式

$$\|f\|=\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 1}|\alpha(\mathrm{t})|.$$

由此证明了下面定理：

每一个定义在空间 L^1 上的有界线性泛函的形式是

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt\,,$$

其中 $\alpha(t)$ 是本质有界函数且 $\|f\|=\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 1}|\alpha(t)|$.

3. 空间 c. 设

$$\xi_i^n=\begin{cases}1, & \text{对 } n=i,\\ 0, & \text{对 } n\neq i,\end{cases}\tag{15}$$

$$x_n=\{\xi_i^n\}\ \text{和}\ x'=\{\xi_n'\}\,.$$

对给定 c 上的(有界)线性泛函 f，令

$$f(x_n) = C_n \quad 和 \quad f(x') = C', \tag{16}$$

又令 $\alpha = \lim_{n\to\infty} \xi_n$，其中 $x = \{x_n\} \in c$，于是有

$$\left\| x - \alpha x' - \sum_{n=1}^{r} (\xi_n - \alpha) x_n \right\| = \sup_{n>r} | \xi_n - \alpha |.$$

由于

$$x = \alpha x' + \lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{r} (\xi_n - \alpha) x_n,$$

因此

$$x = \alpha x' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) x_n,$$

从而

$$f(x) = \alpha f(x') + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) f(x_n).$$

利用(16)，有

$$f(x) = \alpha C' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) C_n. \tag{17}$$

现在，如果 $x = \{\xi_n\}$ 由已给序列

$$\xi_n = \begin{cases} \operatorname{sign} C_n, & 对\ n \leqslant r, \\ 0, & 对\ n > r \end{cases}$$

表示，则有 $\|x\| = 1$，$\alpha = \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$，和 $f(x) = \sum_{n=1}^{r} |C_n|$. 且由于 $|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$，得 $\sum_{n=1}^{r} |C_n| \leqslant \|f\|$. 因为自然数 n 是任意的，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$ 收敛，令

$$C' - \sum_{n=1}^{\infty} C_n = C,$$

由(17)，一般可得到

$$f(x)=\alpha C+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\xi_n,\quad \text{其中}\ \alpha=\lim_{n\to\infty}\xi_n. \tag{18}$$

现在令

$$\xi_n=\begin{cases}\operatorname{sign}C_n, & \text{对}\ n\leqslant r,\\ \operatorname{sign}C, & \text{对}\ n>r,\end{cases}$$

于是$\|x\|=1$，$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\operatorname{sign}C$，且

$$f(x)=|C|+\sum_{n=1}^{r}|C_n|+\sum_{n=r+1}^{\infty}C_n\cdot\operatorname{sign}C\leqslant\|f\|.$$

又因为这个不等式对每个自然数r成立，得到

$$|C|+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\leqslant\|f\|.$$

此外由于

$$f(x)\leqslant\left[|C|+\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\right]\cdot\|x\|,$$

得知有不等式

$$|C|+\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|=\|f\|. \tag{19}$$

由(18)和(19)，证明了下面定理：

定义在c上的每个有界线性泛函的形式是

$$f(x)=C\lim_{n\to\infty}\xi_n+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\xi_n,\quad \text{对}\ x=\{\xi_n\}\in c,$$

且有

$$|C|+\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|=\|f\|.$$

4. 空间 $l^r\,(r\geqslant 1)$. 如前,令 $x_n=\{\xi_i^n\}$, 其中 ξ_i^n 定义如(15). 因此, 对任何 $x=\{\xi_i\}\in l^r$ 有

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i\right\|=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^r\right)^{\frac{1}{r}}\to 0,$$

因此

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i x_i. \tag{20}$$

对给定定义在 l^r 上的有界线性泛函 f, 令 $f(x_i)=C_i$, 因此, 由(20)有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i C_i. \tag{21}$$

现在考虑情形 $r=1$.

对 $i\neq n$, 设 $\xi_n=\operatorname{sign} C_n$ 和 $\xi_i=0$. 于是有 $f(x)=|C_n|\leqslant\|f\|$. 此外, 对每一个序列 $x=\{\xi_i\}\in l^1$, 有不等式 $|f(x)|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|\right)\cdot\sup_{1\leqslant i<\infty}|C_i|$, 因此 $\|f\|=\sup_{1\leqslant i<\infty}|C_i|$.

从而证明了下面的定理:

每个定义在空间 l^1 上的有界线性泛函的形式是

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\xi_i,\quad 对\ x=\{\xi_i\}\in l^1,$$

其中 $\|f\|=\sup_{1\leqslant i<\infty}|C_i|$.

现在考虑情形 $r>1$. 设 $x^0=\{\xi_i^0\}$, 其中

$$\xi_i^0=\begin{cases}|C_i|^{s-1}\cdot\operatorname{sign} C_i, & 对\ i\leqslant n,\\ 0, & 对\ i>n,\end{cases}$$

以及 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$. 于是有

$$\|x^0\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|C_i|^{rs-r}\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|C_i|^{s}\right)^{\frac{1}{r}},$$

从而由(21)有

$$f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}|C_i|^s\leqslant\|f\|\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|C_i|^s\right)^{\frac{1}{r}},$$

因此

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|C_i|^s\right)\leqslant\|f\|.$$

因为n是任意的，故

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|^s\right)\leqslant\|f\|.$$

进一步，对每一个序列$x=\{\xi_i\}\in l^r$，有

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_iC_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^r\right)^{\frac{1}{r}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|^r\right)^{\frac{1}{s}},$$

最后得到等式

$$\|f\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|^s\right)^{\frac{1}{s}}.$$

从而证明了下面的定理：

每一个定义在空间l^r $(r>1)$上的有界线性泛函f的形式是

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\xi_i,\quad \text{其中}\ x=\{\xi_i\}\in l^r,$$

且有

$$\|f\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|^s\right)^{\frac{1}{s}},\quad \text{其中}\ \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$$

5. 空间m与它的可分线性子空间. 设E是m的可分线性子空间，因此它的元素是有界数列. 对E赋予与m相同的范数，换句话说，令

$$\|x\| = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |\xi_i|, \quad 其中\, x = \{\xi_i\} \in E.$$

设 $\{x_n\}$ 是在 E 中的稠序列，其中 $x_n = \{\xi_i^n\}$. 考虑 x_1 和 x_2. 对每个 $\varepsilon_2 > 0$，证明存在自然数 k_2，使得对每一对实数 λ_1 和 λ_2 有性质

$$|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k_2} |\lambda_1 \xi_i^1 + \lambda_2 \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2). \tag{22}$$

将 x_1 是 x_2 的倍数这种平凡情形除外，或者，假若不然，假设对每个自然数 k，存在一对数 λ_1^k 和 λ_2^k 满足

$$|\lambda_1^k x_1 + \lambda_2^k x_2| > \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |\lambda_1^k \xi_i^1 + \lambda_2^k \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2),$$

用 m_k 记两个数 $|\lambda_1^k|$ 和 $|\lambda_2^k|$ 中的较大者，并令 $l_1^k = \dfrac{\lambda_1^k}{m_k}$ 和 $l_2^k = \dfrac{\lambda_2^k}{m_k}$，于是有

$$|l_1^k x_1 + l_2^k x_2| > \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |l_1^k \xi_i^1 + l_2^k \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2). \tag{23}$$

由于对每个自然数 k 有 $1 \leqslant |l_1^k| + |l_2^k| \leqslant 2$，序列 $\{l_1^k\}$ 和 $\{l_2^k\}$ 有收敛子序列. 事实上，存在自然数的递增序列 $\{k_j\}$ 使得序列 $\{l_1^{k_j}\}$ 和 $\{l_2^{k_j}\}$ 分别收敛于 l_1 和 l_2，其中 $1 \leqslant |l_1| + |l_2| \leqslant 2$. 由于当 $j \to \infty$ 时 $k_j \to +\infty$，此外

$$\lim_{j \to \infty} |(l_1 x_1 + l_2 x_2) - (l_1^{k_j} x_1 + l_2^{k_j} x_2)| = 0,$$

于是由(23)有

$$|l_1 x_1 + l_2 x_2| \geqslant \max_{i \geqslant 1} |l_1 \xi_i^1 + l_2 \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2).$$

这是不可能的，因为由定义

$$|l_1 x_1 + l_2 x_2| \geqslant \sup_{i \geqslant 1} |l_1 \xi_i^1 + l_2 \xi_i^2|.$$

对每一对数 λ_1 和 λ_2，已经证明了满足(22)的自然数 k_2 的存在性，由此容易由归纳法证明：对任何给定的正数序列 $\{\varepsilon_n\}$，和对每个 $n > 1$，存在自然数 k_n，使得对每个实数的有限序列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，有

$$|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k_n} |\lambda_1 \xi_i^1 + \lambda_2 \xi_i^2 + \cdots + \lambda_n \xi_i^n| \cdot (1 + \varepsilon_n). \tag{24}$$

对每个自然数n，和$i=1,2,\cdots,n$，以x_i'记序列

$$\xi_1^i,\xi_2^i,\cdots,\xi_{k_n}^i,0,0,\cdots, \tag{25}$$

因此由(24)，对任意数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，有

$$|\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n|\leqslant|\lambda_1x_1'+\lambda_2x_2'+\cdots+\lambda_nx_n'|\cdot(1+\varepsilon_n). \tag{26}$$

现在令f是定义在E上的有界线性泛函. 于是$|f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)|\leqslant\|f\|\cdot|\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n|$，因此由(26)有

$$|\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)|\leqslant\|f\|\cdot(1+\varepsilon_n)\cdot|\lambda_1x_1'+\lambda_2x_2'+\cdots+\lambda_nx_n'|.$$

由x_i'的定义(25)有$x_i'\in c$，又由4.3定理5，存在定义在c中的线性泛函f_n满足条件

$$f_n(x_i')=f(x_i),\quad \text{对}\, i=1,2,\cdots,n\,\text{与}\,\|f_n\|\leqslant\|f\|\cdot(1+\varepsilon_n).$$

考虑到在前面建立的空间c中有界线性泛函的一般形式，以及因为序列x_i'中第k_n项后的所有项均为零，对$i=1,2,\cdots,n$，可知存在数$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_{k_n}}$满足条件

$$\sum_{i=1}^{k_n}a_{n_j}\xi_j^i=f_n(x_i')=f(x_i),\quad \text{对}\, i=1,2,\cdots,n$$

和

$$\sum_{j=1}^{k_n}|a_{n_j}|=\|f_n\|\leqslant\|f\|\cdot(1+\varepsilon_n).$$

因此，若令

$$\alpha_{n_j}=\begin{cases}\dfrac{a_{n_j}}{1+\varepsilon_n}, & \text{对}\ j\leqslant k_n,\\ 0, & \text{对}\ j>k_n,\end{cases} \tag{27}$$

则得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{n_j}\xi_j^i=\frac{1}{1+\varepsilon_n}f(x_i),\quad \text{对}\, i=1,2,\cdots,n \tag{28}$$

和

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{n_j}|\leqslant\|f\|. \tag{29}$$

假设序列$\{\varepsilon_n\}$已选择，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. 于是由(28)得到$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_{n_j}\xi_j^i=f(x_i)$，对$i=1,2,\cdots$. 下面将证明对每个$x\in E$和相同二重无穷数列$\{\alpha_{n_j}\}$，这仍成立.

为此，令$x=\{\xi_i\}$. 由于由定义序列$\{x_n\}$在E中稠密，其中$x_n=\{\xi_i^n\}$，对每个$\varepsilon>0$，存在$x_i=\{\xi_j^i\}$，使得$\|x-x_i\|<\varepsilon$，因此

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{n_j}\xi_j-f(x)\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{n_j}(\xi_j-\xi_j^i)\right|+\left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{n_j}\xi_j^i-f(x_i)\right|+\left|f(x_i)-f(x)\right|.$$

又因为

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{n_j}(\xi_j-\xi_j^i)\right|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{n_j}|\right)\cdot|x-x_i|\leqslant\|f\|\cdot\varepsilon,$$

对充分大的n，有

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{n_j}\xi_j-f(x)\right|\leqslant\|f\|\cdot\varepsilon+\varepsilon+\|f\|\cdot\varepsilon=(2\|f\|+1)\cdot\varepsilon,$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{n_j}\xi_j=f(x),\quad 对每个x=\{\xi_j\}\in E. \tag{30}$$

最后证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{n_j}|=\|f\|. \tag{31}$$

事实上，如果令

$$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{n_j}|, \tag{32}$$

由(30)，对每个$x\in E$，有$|f(x)|\leqslant M\sup\limits_{1\leqslant j<\infty}|\xi_j|=M\cdot\|x\|$. 因此，由于$\|f\|$是对每个$x\in E$满足$|f(x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|$的最小数，故$\|f\|\leqslant M$. 由此，考虑到(32)，(29)得到等式(31).

结合公式(27), (29), (30)和(31)，得到下面的定理[①]：

定义在m的可分向量子空间E上的每个有界线性泛函f的形式是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{n_j}\xi_j,$$

其中$x=\{\xi_j\}$和$\{\alpha_{n_j}\}$是满足下面条件的实数列：

(1) $\alpha_{n_j}=0$，对$j>k_n$，其中$\{k_n\}$是自然数的递增数列；

(2) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\alpha_{n_j}|\leqslant\|f\|$，对 $n=1,2,\cdots$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\alpha_{n_j}|=\|f\|$.

4.5 空间C,L^r,c,l^r中的闭序列和完全序列

在这里应用先前的某些结果到刚才讨论的与特殊空间性质相联系的各种概念和问题.

函数序列$\{x_n(t)\}$，$x_n(t)\in C$, $0\leqslant t\leqslant 1$称为在C上是闭的，如果对每个函数$x(t)\in C$，存在一致收敛于$x(t)$的线性组合序列$\left(\sum\limits_{i=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)}x_i(t)\right)$.

函数序列$\{x_n(t)\}$称为在C上是完全的，如果对任何有界变差函数$g(t)$，由条件$\int_0^1 x_n(t)dg=0$，$n=1,2,\cdots$，得对所有至多可数多个t值有$g(0)=g(t)=g(1)$.

函数序列$\{x_n(t)\}$，$x_n(t)\in L^r$，$0\leqslant t\leqslant 1$，称为在L^r中是闭的，如果对每个函数$x(t)\in L^r$，存在形如

$$g_n(t)=\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_i^{(n)}x_i(t)$$

① 这条定理是 M. S. Mazur 得到的.

的函数序列$\{g_n\}$，它r次方收敛于$x(t)$，即满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x(t)-g_n(t)|^r\, dt=0.$$

序列$\{x_n(t)\}$称为在L^r中是完全的，如果对任何函数$g(t)$，$r=1$时它有界可测，或者$r>1$时它属于L^s，其中$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$. 由条件

$$\int_0^1 x_n(t)g(t)dt=0,\ 对\ n=1,2,\cdots,$$

得几乎处处有$g(t)=0$.

上述两个概念出现在正交级数理论中.

容易看出，函数序列在C或L^r中为闭的充分必要条件是，它在 4.3 节定义意义下是基本的. 类似地，它是完全的充分必要条件是它在同一定义意义下是全的. 为了看到这一点，回忆这一节C和L^r中有界线性泛函的一般形式就够了.

最后，由4.3节定理7立刻得知，在C或L^r中的函数序列是完全的充分必要条件是它们分别为闭.

类似地，可以定义空间c和l^r中函数序列的闭与完全的概念.

4.6 由函数的线性组合逼近属于C, L^r中的函数

4.3 节中的定理 6 也可在各种特殊的空间中得到解释. 这里看两个例子：

1. 空间 C. 存在多项式函数序列$\{x_n(t)\}$，其中$x_n(t)\in C,\ 0\leqslant t\leqslant 1$，一致任意逼近于给定函数$x(t)\in C$的充分必要条件是，对任何有界变差函数$g(t)$，由条件$\int_0^1 x_n(t)dg=0$, 对 $n=1,2,\cdots$, 得$\int_0^1 x(t)dg=0$.

2. 空间 L^r. 存在序列$\{x_n(t)\}$，这里$x_n(t)\in C,\ 0\leqslant t\leqslant 1$，其线性组合任意接近于所给函数$x(t)\in L^r$的$r$次方逼近的充分必要条件是，对任何$r=1$时属于有界可测函数，$r>1$时属于$L^s$的函数$g(t)$，其中$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$，由条件$\int_0^1 g(t)x_n(t)dt=0$，$n=1,2,\cdots$, 得$\int_0^1 g(t)x(t)dt=0$.

4.7 矩问题

现在讨论 4.3 节定理 5 的应用.

所谓矩问题是对给定的函数序列 $\{\varphi_i\}$ 和给定的数列 $\{c_i\}$，求满足无穷方程集

$$\int_a^b f(\varphi_i)dt = c_i, \quad 其中\ i=1,2,\cdots \tag{33}$$

的条件问题.

在这里对赋范空间的两个特殊情形给出这个问题的解：它由 4.3 节定理 5 在这些空间的适当解释得到.

I. 空间 C. 设 $x_i = x_i(t)$，$0 \leqslant t \leqslant 1$ 是连续函数. C 中每个有界线性泛函 f 的形式(见 4.4 节)是 $f(x) = \int_0^1 x(t)dg$，其中 $\| f \| = \underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\mathrm{var}}\, g(t)$，由 4.3 节定理 5 得下面定理①：

存在使得 $\underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\mathrm{var}}\, g(t) \leqslant M$ 的函数 $g(t)$，其满足方程

$$\int_0^1 x_i(t)dg = c_i, \quad 对\ i=1,2,\cdots$$

的充分必要条件是：对每个有限实数序列 $h_1, h_2, \cdots, h_r$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i c_i\right| \leqslant M \cdot \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i(t)\right|.$$

II. 空间 L^r. 对 $r>1$，用类似的方法可以得到下面定理②：

存在使得

$$\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt \leqslant M^s, \quad 其中\ \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$$

的函数 $\alpha(t)$，其中 $0 \leqslant t \leqslant 1$，其满足方程

$$\int_0^1 x_i(t)\alpha(t)dt = c_i, \quad 其中\ x_i(t) \in L^r,\ \ i=1,2,\cdots$$

的充分必要条件是：对每个实数有限序列 $h_1, h_2, \cdots, h_r$，有

---

① 这条定理是 F. Riesz 发现的 (参看 4.2 节脚注中 F. Riesz 和 E. Helly 的工作).

② 这条定理与 F. Riesz. 同上文章中的相同.

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i c_i\right| \leqslant M\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i(t)\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}.$$

对 $r=1$，函数 $x_i(t)$ 必可积，且函数 $\alpha(t)$ 为(本质)有界，其使得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<1} |\alpha(t)| \leqslant M$$

的充分必要条件是

$$\left|\sum_{i=1}^{k} h_i c_i\right| \leqslant M \cdot \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{k} h_i x_i(t)\right| dt.$$

4.8　某些无穷多个未知数的方程组解的存在性条件

现在考虑另外一个问题，即给定二重序列 $\{\alpha_{ik}\}$ 和数列 $\{c_i\}$，求满足无穷多个方程

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} z_k = c_i, \quad \text{其中 } i=1,2,\cdots \tag{34}$$

的数列 $\{z_i\}$ 的存在性条件.

在这里又一次借助于 4.3 节定理 5 的帮助给出这个问题在两个特殊空间中的解.

III. 空间 c. 设 $x_i = \{\alpha_{ik}\}$ 以及

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_{ik} = c_i, \quad \text{其中 } i=1,2,\cdots. \tag{35}$$

由于空间 c 中每个有界线性泛函的形式是

$$f(x) = C\lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i,$$

其中

$$x = \{\xi_i\} \text{ 和 } \|f\| = |C| + \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|,$$

(见 4.4 节)，由定理 5 和(35)得下面的结果：

为了使满足方程(34)以及条件 $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|\leqslant M$ 的数列 $\{z_k\}$ 存在，其充分必要条件是：对每个有限数列 $h_1,h_2,\cdots,h_r$，有不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{r}h_ic_i\right|\leqslant M\cdot\sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{r}h_i\alpha_{ik}\right|.$$

IV. 空间 l^1. 设 $x_i=\{\alpha_{ik}\}$，假设对 $i=1,2,\cdots$，有 $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{ik}|<\infty$. 由于空间 l^1 中每个有界线性泛函的形式是 $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\xi_i$，其中 $x=\{\xi_i\}$ 以及 $\|f\|=\sup_{i\geqslant 1}|x_i|$ (见 4.4 节)，由 4.3 节定理 5 立刻得到下面结果：

为了使满足方程(34)以及条件 $\sup_{k\geqslant 1}|z_k|\leqslant M$ 的有界序列 $\{z_k\}$ 存在，其充分必要条件是：对每个有限实数序列 $h_1,h_2,\cdots,h_r$，有不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{r}h_ic_i\right|\leqslant M\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{r}h_i\alpha_{ik}\right|.$$

第5章 Banach 空间

5.1 Banach空间中的线性算子

在这里建立几个第4章开始已经定义的Banach空间或B空间E中的一般性定理, 其中它们的完备性和赋范性起着本质作用.

定理 1 设F是B可测映射, U是加性算子, 两者定义在 Banach 空间E上, 并对每一个$x\in E$满足$\|F(x)\|\geqslant\|U(x)\|$, 则$U$是有界线性算子.

证明 由前面引言中的定理4, 存在I类纲集$H\subseteq E$, 使得F在$E\setminus H$中连续. 因此, 对$x_0\in E\setminus H$存在$r>0$和$M>0$, 使得

$$\text{对每个}\, x\in E\setminus H,\quad \text{由}\, \|x-x_0\|\leqslant r\, \text{得}\, \|U(x)\|\leqslant\|F(x)\|\leqslant M. \tag{1}$$

由于集合$\left\{x:x\in E\setminus H,\text{且}\,\|x-x_0\|\leqslant\dfrac{r}{2}\right\}$是II类纲集, 故集合$G:x'+x$也是II类纲集, 其中$\|x'\|<\dfrac{r}{2}$, $x\in E\setminus H$以及$\|x-x_0\|\leqslant\dfrac{r}{2}$. 特别, G是非空且包含形如$x'+x_1\in E\setminus H$的元素, 其中$x_1\in E\setminus H$. 由于$\|x_1-x_0\|\leqslant\dfrac{r}{2}$, 有$\|x'+x_1-x_0\|\leqslant r$, 因此, 由(1)有$\|U(x')\|\leqslant\|U(x'+x_1)\|+\|U(x)\|\leqslant 2M$. 所以$U$在球$\left\{x:\|x\|\leqslant\dfrac{r}{2}\right\}$内, 从而也在每个球内按范数有界. 于是由定理1(4.2节), 映射U连续, 因此它是有界线性算子.

定理 2 设U是加性算子, 对每个$x\in E$, $\{x_n\}$是E中满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|U(x_n)|\geqslant\|U(x)\|$的序列, 则$U$是有界线性算子[①].

证明 集合$G_n=\{x\in E:\|U(x)\|\leqslant n\}$对$n=1,2,\cdots$是闭的, 且由于$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 则$G_n$中至少有一个集合包含球, 在其中$U$有界, 因此如上定理得知$U$连续.

定理 3 设$\{U_n\}$是定义在E中的有界线性算子序列. 假设$\{U_n(x)\}$对在球K中稠集G的所有点x都收敛, 且序列$\{\|U_n\|\}$有界, 则序列$\{U_n(x)\}$在每一点

---

① 参看 S. Banach. l. c. Fund. Math. III, 1922：153, 定理 3 .

$x \in E$ 收敛[1].

证明　对给定的 $x_0 \in K$，由假设存在序列 $\{x_n\}$，使得对 $n=1,2,\cdots$，$x_n \in G$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

现在，对任何三个自然数 n, p 和 q，有

$$\|U_p(x_0)-U_q(x_0)\| \leqslant \|U_p(x_0-x_n)\| + \|U_q(x_n-x_0)\| + \|U_p(x_n)-U_q(x_n)\|,$$

故

$$\overline{\lim_{p,q\to\infty}} \|U_p(x_0)-U_q(x_0)\| \leqslant 2M|x_0-x_n|, \quad 其中 M = \overline{\lim_{n\to\infty}}\|U_p\|,$$

因此，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_0-x_n\|=0$，有 $\lim\limits_{p,q\to\infty}\|U_p(x_0)-U_q(x_0)\|=0$，所以序列 $\{U_n(x_0)\}$ 收敛.

设 x 是 E 的任意元素. 令 x_0' 是球 K 的中心，存在 $\varepsilon>0$ 使得 $x_0'+\varepsilon x \in K$，且使得序列 $\{U_n(x_0'+\varepsilon x)\}$ 收敛. 现在 $\{U_n(x)\}$ 的收敛性由序列 $\{U_n(x_0')\}$ 和 $\{U_n(x_0'+\varepsilon x)\}$ 的收敛性得到.

定理 4　设 $\{U_n\}$ 是定义在 E 中的有界线性算子序列，则集合 $H=\{x\in E : \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|U_n(x)\|<\infty\}$ 是 I 类纲集，或者是整个 E.

证明由 3.1 节定理 1 将 H 视为 E 的 B 可测线性子空间得到.

定理 5　如果 E 中有界线性算子序列 $\{U_n\}$，对每一个 $x\in E$ 满足 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|U_n(x)\|<\infty$，则范数序列 $\{\|x_n\|\}$ 有界.

证明　由引言中的定理 11，存在球 $K\subseteq E$ 和数 N，使得对每个 $x\in K$ 和 $n=1,2,\cdots$ 满足 $\|U_n(x)\|\leqslant N$. 设 r 表示球 K 的半径，对 $n=1,2,\cdots$ 容易得到 $\|U_n\|\leqslant 2\dfrac{N}{r}$.

定理 6　若对每个定义在 E 中的有界线性泛函 f，序列 $\{x_n\}\subseteq E$ 满足 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f(x_n)|<\infty$，则范数序列 $\{\|x_n\|\}$ 有界.

证明　E 上所有有界线性泛函的集合 E^*，对这种泛函定义上述范数后，形成一个 Banach 空间. 对每个 $f\in E^*$，用 $F_n(f)=f(x_n)$ 在 E^* 上定义泛函序列 $\{F_n\}$. 假设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f(x_n)|<\infty$，从而，对每个 $f\in E^*$ 得到 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|F_n(f)|<\infty$. 由 5.1 节定理 5，存在数 N 使得对每个 $n=1,2,\cdots$，有 $|F_n(f)|\leqslant N\cdot\|f\|$. 此外，由于

[1] 参看 S. Banach 和 H. Steinhaus, 同上, Fund. Math. IX, 1927：53.

$x_n \in E$，对每个 $n=1,2,\cdots$，由定理 3 (4.2 节)存在定义在 E 中的有界线性泛函 f_n，使得 $|f_n(x_n)|=\|x_n\|$ 和 $\|f_n\|=1$．因此，对每个 n，有 $\|x_n\|=|f_n(x_n)|=|F_n(f_n)|\leqslant N\cdot\|f_n\|=N$，证毕.

5.2　奇点的凝聚原理

定理 7　设 $\{U_{pq}\}$ 是 E 中有界线性算子二重序列，满足

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\|U_{pq}\|=\infty,\quad 对每个\ p=1,2,\cdots, \tag{2}$$

则存在在 E 中与 p 无关的 II 类纲集 $G\subseteq E$，使得对每个 $x\in G$ 有

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\|U_{pq}(x)\|=\infty,\quad 对每个\ p=1,2,\cdots. \tag{3}$$

证明　集合 $H_p=\{x\in E:\overline{\lim\limits_{q\to\infty}}\|U_{pq}(x)\|=\infty\}$ 不可能是整个 E，因为由 5.1 节定理 5 与假设(2)矛盾．由此得知，由 5.1 节定理 4，使得条件(3)不成立的 H_p 的所有元素 $x\in E$ 的集合 $H=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}H_p$ 是 E 中的II类纲集．因而所有余下的证明是取 $G=E\setminus H$．

附注　算子 U_{pq} 的值域可以按 $p=1,2,\cdots$ 变化，因此对给定的 p，显然必须假设它们对 q 的所有值相同，因为在定理 7 的叙述中用了当 q 趋于 ∞ 时序列 $\{U_{pq}(x)\}$ 的收敛性概念.

本节定理 7 与 1.4 节定理 6 一起组成了泛函分析方法中大家熟知的奇点凝聚原理．下面再借助一些例子来详细说明这一点.

设 $\{g_k(t)\}$ 是[0,1]上平方可积函数的正交序列．对[0,1]上任何给定的可积函数 $x(t)$，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t)\int_0^1 g_k(s)x(s)ds$$

称为函数 $x(t)$ 关于序列 $\{g_k(t)\}$ 的发展．当然，要求积分 $\int_0^1 g_k(s)x(s)ds$ 对每个 $k=1,2,\cdots$ 都存在.

例如对空间 C 和 L^1，下面定理成立：

在空间 C．设 $\{t_p\}$ 是[0,1]中给定的点列．则对每个 $p=1,2,\cdots$，连续函数 $x_p(t)$ 在点 t_p 的发展分别为发散或无界的存在性，将导致连续函数 $x(t)$ 对每个

$p=1,2,\cdots$ 在点 t_p 的发展分别为发散或无界的存在性.

证明由定理 7 以及 1.4 节定理 6 得到, 只要令

$$U_{pq}(x)=\sum_{k=1}^{q}g_k(t_p)\int_0^1 g_k(s)x(s)ds,$$

其中 U_{pq} 为 C 中的线性泛函.

在 L^1 空间. 设 $\{[\alpha_p,\beta_p]\}$ 是给定的[0,1]的子区间序列, 则对每个 $p=1,2,\cdots$, 发展具有性质

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\alpha_p}^{\beta_p}|s_n(t)|\,dt=\infty,\quad 其中\ s_n(t)=\sum_{k=1}^{n}g_k(t)\int_0^1 g_k(t)x_p(t)dt$$

的可积函数 $xp(t)$ 的存在性, 将导致可积函数 $x(t)$ 的存在性, 同时其发展在所有区间 $[\alpha_p,\beta_p]$ 具有相同性质.

证明由定理 7 得知, 只要令

$$U_{pq}(x)=\sum_{k=1}^{q}g_k(t)\sum_{0}^{1}g_k(t)x(t)\,dt,\quad 对\ \alpha_p\leqslant t\leqslant\beta_p,$$

并视 U_{pq} 为定义在[0,1]上可积函数空间中的线性算子, 它的值域位于 $[\alpha_p,\beta_p]$ 上的可积函数空间内.

附注　特别, 如果点集 $\{(\alpha_p,\beta_p):p=1,2,\cdots\}$ 形成单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 的稠子集, 那么问题中对 $x(t)$ 的性质在[0,1]的每个子区间 $[\alpha,\beta]$ 上都成立.

基于这个附注, 可以证明对 Fourier 级数情形, 存在满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_{\alpha}^{\beta}s_n(t)dt\right|=\infty,\quad 对\ [0,2\pi]\ 的每个子区间\ [\alpha,\beta]$$

的可积函数 $x(t)$.

5.3　Banach 空间的紧性

引理　给定一个闭线性子空间 G, 它是线性子空间 $D\subseteq E$ 的真子集, 则对每个数 $\varepsilon>0$, 存在 $x_0\in D$ 使得

$$\|x_0\|=1,\ 且对每一个\ x\in G\ 有\ \|x_0-x\|\geqslant 1-\varepsilon.$$

证明 设 $x' \in D \setminus G$，d 是 x' 与 G 之间的距离，η 是任意正数. 于是存在 $y' \in G$ 使得 $d \leqslant \|x' - y'\| \leqslant d + \eta$. 令 $x_0 = \dfrac{x' - y'}{\|x' - y'\|}$. 于是对每个 $x \in G$ 有 $\|x_0 - x\| = \dfrac{1}{\|x' - y'\|} \cdot \|x' - y' - \|x' - y'\| \cdot x\|$，以及由于 $x \in G$ 和 $y' \in G$ 得知 $y' + \|x' - y'\| x \in G$，由此得 $\|x_0 - x\| \geqslant \dfrac{1}{\|x' - y'\|} \cdot d \geqslant \dfrac{d}{d + \eta}$，因此，若令 $\eta = d \cdot \dfrac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$，有 $\|x_0 - x\| \geqslant 1 - \varepsilon$.

显然，也有 $\|x_0\| = \|x' - y'\| / \|x' - y'\| = 1$ 和 $x_0 \in D$，因为 $x' \in D$ 和 $y' \in G \subseteq D$.

定理 8 如果 E 的每个赋范有界子集是相对紧的，则存在 E 元素的有限集 $x_1, x_2, \cdots, x_r$，使得每个 x 可写为形式

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r, \tag{4}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是依赖于 x 的数.

证明 设 x_1 是 E 中满足 $\|x_1\| = 1$ 的任意元素，对 $r > 1$，令 x_{r+1} 是 E 中满足

$$\|x_{r+1}\| = 1 \text{ 且 } \|x_{r+1} - x_i\| \geqslant \frac{1}{2}, \text{ 对 } i = 1, 2, \cdots, r \tag{5}$$

的任意元素.

对每个 $r \geqslant 1$，设 G_r 表示所有形如(4)的元素 $x \in E$ 的集合，并令 $D = E$. 如果定理不成立，则对每个 r 应该有 $G_r \neq D$，因此按照上面的引理，$G = G_r, \varepsilon = \dfrac{1}{2}$ 以及 $x_0 = x_{r+1}$，对每个自然数 r，得到满足(5)的 $x_{r+1} \in E$ 的存在性，即序列 $\{x_r\}$ 的存在性，使得 $\|x_r\| = 1$ 且对 $p \neq q$ 满足 $\|x_p - x_q\| \geqslant \dfrac{1}{2}$.

这个序列可以没有任何收敛的子序列，因此构成一个非相对紧集，尽管它是范数有界的. 如此与定理假设矛盾.

5.4 空间 L^r, c, l^p 的性质

应用1.3节定理4到定义在这些空间中的有界线性泛函的一般形式，得到下面的定理：

对 L^r，其中 $r \geqslant 1$. 如果 $\alpha(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$ 是可测函数，且如果对每个函数 $x(t) \in L^r$，积分 $\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt$ 存在，则对 $r > 1$ 有 $\int_0^1 |\alpha(t)|^{r/(r-1)} dt < \infty$，且对 $r = 1$，

$\alpha(t)$ (本质)有界[1].

证明 对自然数 n，令

$$\alpha_n(t)=\begin{cases}\alpha(t), & \text{对 } |\alpha(t)|\leqslant n,\\ n\ \mathrm{sign}\ \alpha(t), & \text{对 } |\alpha(t)|>n,\end{cases}$$

于是有 $|x(t)\alpha(t)|\geqslant|x(t)\alpha_n(t)|$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(t)=\alpha(t)$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)dt=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt.$$

因为对 $n=1,2,\cdots,\alpha_n(t)$ 是有界函数，表达式 $\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)dt$ 在 L^r 上定义了有界线性泛函，按照 1.3 节定理 4，$\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt$ 也是有界线性泛函. 因此，由空间 L^r $(r>1)$中有界线性泛函的一般形式定理(见 3.3 节)，存在函数 $\overline{\alpha}(t)\in L^{r/(r-1)}$，使得对每个 $x(t)\in L^r$，有 $\int_0^1 x(t)\overline{\alpha}(t)dt=\int_0^1 x(t)\alpha(t)\,dt$. 所以，对每个 $0\leqslant t_0\leqslant 1$，若令

$$x(t)=\begin{cases}1, & \text{对 } 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ 0, & \text{对 } t_0\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

就有 $\int_0^{t_0}\overline{\alpha}(t)\,dt=\int_0^{t_0}\alpha(t)\,dt$，因此几乎处处有 $\overline{\alpha}(t)=\alpha(t)$.

类似地，也可对 $r=1$ 进行讨论.

对空间 c. 若对每个收敛数列 $x=\{\xi_i\}$，级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$ 收敛，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty$.

证明 由于对每个 $n=1,2,\cdots$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i$ 是空间 c 中的有界线性泛函，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$，由 1.3 节的定理 4，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$ 也是空间 c 中的有界线性泛函. 因此存在 $M>0$，使得

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i\right|\leqslant M\cdot\|x\|\leqslant M\cdot\sup_{i\geqslant 1}|\xi_i|.$$

因此，若令

---

① 对 $r>1$ 的这个定理是属于 M. F. Riesz.的.

$$\xi_i = \begin{cases} \operatorname{sign} \alpha_i, & 对\ i \leqslant n\ 和\ \alpha_i \neq 0, \\ 0, & 对\ i > n\ 和\ \alpha_i = 0, \end{cases}$$

则对每个$n=1,2,\cdots$，得到$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \leqslant M$. 因此$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i| \leqslant M$.

对空间 l^r，其中$r \geqslant 1$. 如果级数$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$对每个序列$x=\{\xi_i\} \in l^r$收敛，则对$r>1$，$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^{r/(r-1)}<\infty$，以及对$r=1$序列$\{\alpha_i\}$有界[①].

证明类似于上一个定理.

5.5　可测函数的 Banach 空间

在这里暂停对满足进一步特殊条件的B空间的几个性质的讨论. 为此，设E是定义在闭区间[0,1]上的可测函数空间，且对任何序列$\{x_n\}=\{x_n(t)\} \subseteq E, 0 \leqslant t \leqslant 1$，满足：

(1) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$得几乎处处有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=0$；

(2) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$得在$E$中存在子序列$\{x_{n_i}(t)\}$和$x$，使得对每个$i=1,2,\cdots$和$0 \leqslant t \leqslant 1$中的几乎处处$t$，有$|x_{n_i}(t)| \leqslant |x(t)|$；

(3) 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$得几乎处处有$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| \geqslant \|x\|$.

这些空间的特殊例子是在前面已经多次讨论过的空间M,C和L^r. 至于考虑的条件(2)，在情形$\sum_{i=1}^{\infty}\|x_{n_i}\|<\infty$，必须用等式

$$x(t)=\sum_{i=1}^{\infty}|x_{n_i}(t)|$$

定义函数$x(t)$.

定理 9　设E和E_1是两个满足条件(1), (2)和(3)的B空间，$K(s,t)$是定义在正方形$[0,1]\times[0,1]$上的函数. 如果对每个$x \in E$和几乎所有的s值，以及若$u(s) \in E_1$，积分

① 最后这条定理属于 M.E. Landaus (Über einen Kenvergenzsatz. Göttinger Nachr, 1907: 25-27).

$$u(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt \tag{6}$$

存在，则 u 是有界线性算子[①].

证明　假设 $\{x_n\}$ 和 x 满足

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0, \tag{7}$$

并设 $\{\overline{x}_n\}$ 是 $\{x_n\}$ 的任何子序列. 由(7)和条件(2)，存在 $\{\overline{x}_n-x\}$ 的子序列 $\{\overline{x}_{n_i}-x\}$ 以及 $z\in E$，使得对每个 $i=1,2,\cdots$，几乎处处有 $|\overline{x}_{n_i}(t)-x(t)|\leqslant z(t)$. 显然几乎处处有 $\lim\limits_{i\to\infty}K(s,t)[\overline{x}_{n_i}(t)-x(t)|=0$，以及 $|K(s,t)\cdot(\overline{x}_{n_i}-x)|\leqslant|K(s,t)|\cdot z(t)$. 此外，当 $z\in E$ 时，积分 $\int_0^1 K(s,t)z(t)dt$ 在测度为 1 的集合 H 上存在. 因此有 $\lim\limits_{i\to\infty}\int_0^1 K(s,t)[\overline{x}_{n_i}(t)-x(t)]dt=0$，因此对 $s\in H$，有 $\lim\limits_{i\to\infty}\int_0^1 K(s,t)\overline{x}_{n_i}(t)dt=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt$.

现在，由于 $\{u_n\}$ 的每个子序列有几乎处处收敛于 $u(s)$ 的子序列，其中 $u_n(s)=\int_0^1 K(s,t)x_n(t)dt$，所以几乎处处有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(s)=u(s)$. 由条件(3)和 5.1 节定理 2 得知，由(6)定义的 u 是有界线性算子.

5.6　一些特殊 Banach 空间中的有界线性算子例子

在这里给出 5.5 节证明的定理 9 在空间 M, C 和 L^r 中的几个应用.

空间 M. 若对 $0\leqslant s\leqslant 1$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$，$K(s,t)$ 是可测函数，又如果对每个 s，积分 $\int_0^1|K(s,t)|dt<N<\infty$，则表达式

$$U(x)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt \tag{8}$$

定义一个从 M 到 M 的有界线性算子.

空间 C. 若对 $0\leqslant s\leqslant 1$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$ 函数 $K(s,t)$ 连续，则表达式(8)定义一个从 C 到 C 的有界线性算子.

空间 L^1. 若在正方形 $0\leqslant s\leqslant 1$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上函数 $K(s,t)$ 可测，并且满足

① 参看 S. Banach. 同上. Fund. Math. III, 1922: 166 的定理 2.

$\int_0^1 C(s)ds < N < \infty$，其中 $C(s) = \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 1} |K(s,t)|$，则(8)定义一个从 L^1 到 L^1 的有界线性算子.

空间 L^p. 如果 $K(s,t)$ 是正方形 $0\leqslant s\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1$ 上的可测函数，且对每对函数 $x(t)\in L^p$ 和 $y(s)\in L^{q/(q-1)}$，其中 $p\geqslant 2$ 和 $q\geqslant 2$，有

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)x(t)y(s)|\,dsdt < \infty, \tag{9}$$

则(8)定义一个从 L^p 到 L^q 的有界线性算子.

事实上，对任何 $x\in L^p$ 和任何 $y\in L^{q/(q-1)}$，有

$$\int_0^1\int_0^1 K(s,t)x(t)y(s)dsdt = \int_0^1 y(s)\left[\int_0^1 K(s)x(t)dt\right]ds,$$

由于(见 5.4 节) $\int_0^1 K(s,t)x(t)dt \in L^q$，因此由(8)，$U$ 是有界线性算子.

为了使条件(9)满足，只需 $\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^{r/(r-1)}dsdt < \infty$，其中 r 是数 p 和 $q/(q-1)$ 的较小者；特别，当 $r=1$ 时函数 $K(s,t)$ 有界，当 $p=q=+\infty$ 时它可积.

事实上，由 Riesz 不等式，有

$$\left|\int_0^1\int_0^1 K(s,t)x(t)y(s)\,dsdt\right| \leqslant \left\{\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}\,dsdt\right\}^{\frac{r}{r-1}} \cdot \left\{\int_0^1 |x(s)|^r\,ds\right\}^{\frac{1}{r}} \cdot \left\{\int_0^1 |y(s)|^r\,ds\right\}^{\frac{1}{r}}.$$

因此，特别对 $p=q=2$，(9)可以用 $\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^2 dsdt < \infty$ 代替，由此得知，由(8)给出的算子是从 L^2 到它自己的有界线性算子.

同样的说明对 $p=q=1$ 和 $p=q=\infty$ 情形也适用.

5.7　求和法的某些定理

给定无穷数组

$$\begin{matrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1k}, \cdots \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2k}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{matrix} \tag{A}$$

称数列 $x = \{\xi_k\}$ 对法 A(对应于数组 A)是可和(于 $A(x)$)，如果每个级数 $A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k$ 收敛，且序列 $\{A_i(x)\}$ 也收敛(于 $A(x)$).

求和法 A 称为持久的，如果每个收敛序列按这个法都收敛于它的极限；称它为可逆，如果对每个收敛序列 $\{\eta_i\}$，恰好存在对应的一个序列 x，它不必收敛，使得对 $i = 1, 2, \cdots$，有 $A_i(x) = \eta_i$. 称对应于数组 $B = \{b_{ik}\}$，求和法 B 不弱于求和法 A，如果用法 A 每个序列可和，用法 B 也可和.

最后，求和法 A 是完满的，如果它既持久又可逆，且使得当

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty \text{ 和 } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik} = 0, \text{ 对 } k = 1, 2, \cdots, \tag{10}$$

得

$$\alpha_i = 0, \text{ 对每个 } i = 1, 2, \cdots. \tag{11}$$

定理 10 法 A 是持久的充分必要条件是同时满足条件：

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leqslant M$，对每个 $i = 1, 2, \cdots$；

(2) $\lim_{i \to \infty} a_{ik} = 0$，对每个 $k = 1, 2, \cdots$；

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1$[①].

证明 必要性. 对每个收敛序列 $x = \{\xi_k\}$，与每个 $i = 1, 2, \cdots$，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k$ 的收敛(见 5.5 节对 c)导致级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ 绝对收敛. 因此在空间 c 定义的 A_i 是有界线性泛函，且由于对 $x \in c$，$\{A_i(x)\}$ 是收敛序列，从而由 5.1 节定理 5 得到条件(1)满足.

---

① 这条定理属于 M.O. Toepilitz. Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace Mat. Fiz. XXII. Varsovie, 1911: 113-119.

现在，设对 $i=1,2,\cdots$，$\xi_i^0=1$，对 $i\neq n$，$\xi_n^n=1$，$n=1,2,\cdots$. 令 $x_n=\{\xi_i^n\}$，$n=0,1,2,\cdots$. 对自然数 i 和 n，有 $A_i(x_0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}$ 和 $A_i(x_n)=a_{in}$，因此 $A(x_0)=1$；对 $n>0$，$A(x_n)=0$，由此得知条件(2)和(3)也满足.

三个条件的充分性由 5.1 节定理 3 和定义在空间 c 中的序列 $\{x_n\}$ 是基本的得知.

引理 1 设 A 是持久法，令 $y_0=\{\eta_i^0\}$ 是收敛序列. 如果对每个数列 $\{\alpha_i\}$，由条件(10)得 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i^0=0$，则对每个 $\varepsilon>0$ 存在收敛序列 x，使得

$$|A_i(x)-\eta_i^0|<\varepsilon,\ 对每一个\ i=1,2,\cdots. \tag{12}$$

证明 设 G 表示所有收敛序列 $\{\eta_i\}$ 的集合，对此存在对应的收敛序列 x，使得对 $i=1,2,\cdots$，有 $\eta_i=A_i(x)$. 于是作为空间 c 的子集，集合 G 显然定义了一个向量子空间. 如果 y_0 不是 G 的聚点，则由 4.3 节的引理，存在定义在空间 c 上的有界线性泛函 F，使得 $F(y_0)=1$，且对每个 $y\in G$ 有 $F(y)=0$. 回忆空间 c 中有界线性泛函的一般形式(见 4.4 节)，存在数列 $\{\alpha_i\}$，使得级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ 绝对收敛且满足：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i+\alpha\lim_{i\to\infty}\eta_i=0,\ 对\ \{\eta_i\}\in G, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i^0+\alpha\lim_{i\to\infty}\eta_i=1. \tag{14}$$

由于法 A 是持久的，由(13)得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i A_i(x)+\alpha\lim_{i\to\infty}\eta_i=0,\ 对每个\ x\in\{\xi_k\}\in c. \tag{15}$$

以及由 5.7 节定理 10 得到存在满足条件(1)的 M. 由此得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_i|\cdot|a_{ik}|\cdot|\xi_k|\leqslant M\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|\right)\|x\|,$$

因此

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i A_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_{ik}. \tag{16}$$

对固定的自然数k，令$\xi_k=1$；对$n\neq k$令$\xi_n=0$，由(15)得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_{ik}=0,\quad 对\ k=1,2,\cdots. \tag{17}$$

于是对$k=1,2,\cdots$，若令$\xi_k=1$，由(15), (16)和(17)得$\alpha=0$，因此，由(14)得$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i^0=1$，考虑到(17), 这与假设矛盾.

引理 2 如果法 A 是持久的, 且由条件(10)得条件(11), 则对每个收敛序列$\{\eta_i^0\}$和每个数$\varepsilon>0$，存在满足条件(12)的收敛序列x.

证明直接由 5.7 节引理 1 得知.

引理 3 如果$x_0=\{\xi_k^0\}$是有界序列, 按持久法 A 它是可和的, 则对每个$\varepsilon>0$，存在收敛序列x满足

$$|A_i(x)-A_i(x_0)|<\varepsilon,\quad 对每个\ i=1,2,\cdots. \tag{18}$$

证明 令

$$\eta_i^0=A_i(x_0),\quad 对\ i=1,2,\cdots, \tag{19}$$

并用$\{\alpha_i\}$记任何满足(10)的序列.

由(19)有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i^0=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i A_i(x_0). \tag{20}$$

由于 A 是持久法, 由 5.7 节定理 10 存在满足条件(1)的数M，因此

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_i|\cdot|a_{ik}|\cdot|\xi_k^0|\leqslant M\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|\right)\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k^0|.$$

由(20)得$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i^0=0$. 由 5.7 节引理 1 就建立了此引理的断言.

引理 4 设x_0由法 A 是可和序列, 它既持久又可逆. 如果对任何$\varepsilon>0$，存在满足(18)的收敛序列x，则按每个不弱于 A 的持久法 B, 序列x_0可和于同一个数.

证明 由 A 的可逆性(见 3.6 节定理 10 以及 3.7 节的附注)得到序列$\{\alpha_i\}$和数

组 $\{\beta_{ik}\}$ 的存在性，它们有下面的性质：

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\beta_{ik}|<\infty, \quad 对\ k=1,2,\cdots. \tag{21}$$

如果对收敛序列 $y=\{\eta_i\}$，若令 $\xi_k=f_k(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_{ik}\eta_i+\alpha_k\lim_{i\to\infty}\eta_i$，其中 $k=1,2,\cdots$，则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{ik}\xi_k=\eta_i, \quad 对\ i=1,2,\cdots. \tag{22}$$

因此，在空间 c 上定义了有界线性泛函 f_k. 由于对每个收敛序列 y，对应的序列 $x=\{\xi_k\}$ 由假设按持久法 B 可和，每个级数 $\sum_{k=1}^{\infty}b_{ik}\xi_k$ 收敛，因此它们的和序列 $\{B_i(x)\}$ 收敛.

对每个 $y\in c$，令

$$F_i(y)=\sum_{k=1}^{\infty}b_{ik}f_k(y), \quad 对\ i=1,2,\cdots\ 和\ F(y)=\lim_{i\to\infty}F_i(y).$$

因此，定义的 F_i 是有界线性泛函；由 1.3 节的定理 4，F 也是有界线性泛函.

按照假设，设 x_0 是给定序列，x 是满足(18)的收敛序列. 若令 $y_0=\{A_i(x_0)\}$ 和 $y=\{A_i(x)\}$，则有 $y_0\in c$ 和 $\|y-y_0\|\leqslant\varepsilon$，故

$$|B(x)-B(x_0)|=|F(y)-F(y_0)|\leqslant\|F\|\cdot\varepsilon. \tag{23}$$

又由 $A(x)=B(x)$，得

$$|A(x_0)-B(x_0)|\leqslant|A(x_0)-A(x)|+|B(x)-B(x_0)|,$$

因此，由(18)和(23)得

$$|A(x_0)-B(x_0)|\leqslant\|F\|\cdot\varepsilon+\varepsilon,$$

由此得知，$A(x_0)=B(x_0)$，证毕.

从 5.7 节引理 3 和引理 4 得

定理 11 如果持久法 B 不弱于持久可逆法 A，则每个由 A 是可和的有界序列

也由 B 可和于同一个数[①].

进一步，由 5.7 节引理 2 和引理 4 得

定理 12 如果 A 是完满法, B 是不弱于 A 的持久法，则每个由 A 可和序列也由 B 可和于同一个数[②].

---

① 对一类特殊的可逆法，知道这个正规法的这个定理是 M.S. Mazur 发现的 (同前, Math. Zeitschr, 1928, 28: 599-611. Satz VII).

② 对正规法参看 S. Mazur. Über eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren. Stud. Math. II, 1930: 40-50.

第6章 紧 算 子

6.1 紧 算 子

Banach 空间之间的有界线性算子 U 称为是紧的，如果它将范数有界集映为相对紧集.

例子 对 $i=1,2,\cdots,n$，设 X_i 是有界线性泛函，x_i 是空间的元素，则由 $U(x)=\sum_{i=1}^{n}X_i(x)x_i$ 给出的 U 是紧的.

定理 1 任何一个紧算子的值域是可分的.

证明 集合 $G_n=\{U(x):\|x\|\leqslant n\}$ 是相对紧的，故它是可分的[①]，因此集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ 等于 U 的值域.

定理 2 若 $\{U_n\}$ 是紧算子序列，且有界线性算子 U 满足 $\lim_{n\to\infty}\|U_n-U\|=0$，则 U 也是紧的.

证明 设 $\{x_i\}$ 是有界序列，$\{\overline{x}_i\}$ 是 $\{x_i\}$ 按对角线法则得到的子序列，使得对每个自然数 n，$\lim_{i\to\infty}U_n(\overline{x}_i)$ 存在. 因此，对 $n=1,2,\cdots$，有

$$\|U(\overline{x}_p)-U(\overline{x}_q)\|\leqslant\|U(\overline{x}_p)-U_n(\overline{x}_p)\|+\|U_n(\overline{x}_p)-U_n(\overline{x}_q)\|+\|U_n(\overline{x}_q)-U(\overline{x}_q)\|.$$

故

$$\|U(\overline{x}_p)-U(\overline{x}_q)\|\leqslant\|U-U_n\|(\|\overline{x}_p\|+\|\overline{x}_q\|)+\|U_n(\overline{x}_p)-U(\overline{x}_q)\|,$$

由此，显然 $\overline{\lim_{p,q\to\infty}}\|U(\overline{x}_p)-U(\overline{x}_q)\|=0$. 因此 $\{U(\overline{x}_i)\}$ 是 Cauchy 序列，从而得知算子 U 的紧性.

6.2 某些特殊空间中的紧算子例子

如果 $K(s,t)$ 对 $0\leqslant s\leqslant 1$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$ 是连续函数，对任何可积函数 $x(t)$，由

---

① 例如参看 F. Hausdorff. 同前, 126.

$$u(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt \tag{1}$$

定义的变量s的函数连续. 将它视为定义在空间

$$M,\ C,\ L^1\ 和\ L^r,\quad 其中\ r>1 \tag{2}$$

之一中的算子, 其值域也是这些空间的任何一个, 则由(1)给出的算子是紧的.

证明基于下面的 Arzelà 定理:

连续有界的函数序列$\{u_n(x)\}$有一致收敛的子序列, 其充分条件是: 对每个数$\varepsilon>0$, 存在数$\eta>0$, 使得对每个$n=1,2,\cdots$, 由不等式$|s_1-s_2|<\eta$得$|u_n(s_1)-u_n(s_2)|\leqslant\varepsilon$.

事实上, 假设$\|x_n\|\leqslant 1$, 以及对$0\leqslant s\leqslant 1$和$n=1,2,\cdots$, 有$u_n(s)=\int_0^1 K(s,t)x_n(t)dt$. 对每个$\varepsilon>0$, 由$K(s,t)$的连续性得知$\eta>0$的存在性, 使得对$0\leqslant t\leqslant 1$由不等式$|s_1-s_2|<\eta$得不等式$|K(s_1,t)-K(s_2,t)|\leqslant\varepsilon$. 因此

$$|u_n(s_1)-u_n(s_2)|\leqslant\left|\int_0^1[K(s_1,t)-K(s_2,t)]x_n(t)dt\right|\leqslant\varepsilon\int_0^1|x_n(t)|\,dt.$$

由不等式$\int_0^1|x_n(t)|\,dt\leqslant\|x_n\|$, 容易看到, 在空间(2), $|u_n(s_1)-u_n(s_2)|\leqslant\varepsilon$成立, 因此由 Arzelà 定理, 从序列$\{u_n(s)\}$可选取一致收敛的子序列. 现在, 由于在空间(2)中任何一个的任何一致收敛的函数序列按空间的范数也收敛, 这就证明了算子(1)在这些空间中是紧的.

特别, 有下面的定理:

空间 C. C中算子(1)紧的充分条件是: 对每个s_0, 有

$$\lim_{s\to s_0}\int_0^1|K(s_0,t)-K(s,t)|\,dt=0. \tag{3}$$

事实上, 对每个$\varepsilon>0$, 容易从(3)得到$\eta>0$的存在性, 使得由$|s_1-s_2|\leqslant\eta$得

$$\int_0^1|K(s_1,t)-K(s_2,t)|\,dt\leqslant\varepsilon,$$

如前, 由此得知算子(1)在C中的紧性.

条件(3)将满足, 例如当函数$K(s,t)$有界, 且对每个s_0和几乎每个t满足$\lim\limits_{s\to s_0}K(s,t)=K(s_0,t)$时.

最后指出，如果条件(3)满足，则由

$$y(s)=\int_0^s K(s,t)x(t)dt$$

给出的算子在 C 中也紧.

空间 L^p. 设 $K(s,t)$ 是 $0\leqslant s\leqslant 1$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的可测函数，r 是数 p 和 $q/(q-1)$ 的较小者，其中 $p>1$，$q>1$. 如果

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}dsdt<\infty, \tag{4}$$

则(1)定义一个从 L^p 到 L^q 的紧算子.

事实上，设 $\{K_n(s,t)\}$ 是连续函数序列，它满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1 |K_n(s,t)-K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}dsdt=0. \tag{5}$$

由于对 $n=1,2,\cdots$，由 $y=U_n(x)=\int_0^1 K_n(s,t)x(t)dt$ 给出的从 L^p 到 L^q 的算子 U_n 是紧的，故得知

$$\begin{aligned}\|U_n(x)-U(x)\|^q&\leqslant\int_0^1\left|\int_0^1(K_n-K)x(t)dt\right|^q ds\\&\leqslant\left\{\int_0^1 ds\left[\int_0^1|K_n-K|^{r/(r-1)}dt\right]^{q(r-1)/r}\right\}\cdot\left(\int_0^1|x(t)|^r dt\right)^{q/r}.\end{aligned}$$

现在，由于 $r\leqslant p$，有

$$\left(\int_0^1|x(t)|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\int_0^1|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

以及由于 $r\leqslant\dfrac{q}{q-1}$，即 $\dfrac{q(r-1)}{r}\leqslant 1$，有

$$\|U_n(x)-U(x)\|\leqslant\left\{\int_0^1\int_0^1|K_n-K|^{\frac{r}{r-1}}dtds\right\}^{\frac{r-1}{r}}\|x\|,$$

因此

$$\| U_n - U \| \leqslant \left[\int_0^1 \int_0^1 | K_n - K |^{\frac{r}{r-1}} dtds \right]^{\frac{r-1}{r}},$$

由此，由(5)，$\lim_{n\to\infty} \| U_n - U \| = 0$．由定理 2，得知算子 U 的紧性，即由(1)给出的算子是紧的，其中 $u(s) = U(x) \in L^q$．

附注 特别，对 $p = q = 2$，由条件

$$\int_0^1 \int_0^1 K^2(s,t) dsdt < +\infty$$

得知作为 L^2 到它自身的算子(1)的紧性.

6.3 伴随(共轭)算子

通常，设 E 和 E_1 是两个 Banach 空间，U 是从 E 到 E_1 的有界线性算子.

用 X 和 Y 分别记 E 和 E_1 上的有界线性泛函.

考虑表达式 $Y[U(x)]$，其中 Y 是 E_1 上任一有界线性泛函．这个表达式可容易地视为是定义在 E 上的泛函．事实上，若令

$$X(x) = Y[U(x)]. \tag{6}$$

由此定义的 X 是加性连续泛函，因为有 $|X(x)| = |Y[U(x)]| \leqslant \| Y \| \cdot \| U \| \cdot \| x \|$，因此

$$\| X \| \leqslant \| Y \| \cdot \| U \|. \tag{7}$$

现在，关系式(6)定义了一个从 E 上的有界线性泛函空间 E_1^* 到定义在 E 上的有界线性泛函空间 E^*，并由

$$X = U^*(Y)$$

给出新算子 U^*.

算子 U^* 称为 U 的伴随算子，或共轭算子．由(7)它是加性和连续的.

定理 3 对有界线性算子 U 的伴随算子 U^*，有 $\| U^* \| = \| U \|$.

证明 首先，对每个 $x \in E$，有 $|Y[U(x)]| \leqslant \| Y \| \cdot \| U \| \cdot \| x \|$，因此 $\| U^*(Y) \| = \| Y(U) \| \leqslant \| Y \| \cdot \| U \|$，从而

$$\|U^*\| \leqslant \|U\|. \tag{8}$$

其次，任给 $x_0 \in E$，由 4.2 节的定理 3，存在 E_1 上的有界线性泛函 Y_0，使得 $\|Y_0\| = 1$ 以及 $|Y_0[U(x_0)]| = \|U(x_0)\|$，因此 $\|U(x_0)\| = |Y_0[U(x_0)]| \leqslant \|U^*\| \cdot \|Y_0\| \cdot \|x_0\| = \|U^*\| \cdot \|x_0\|$，所以，$\|U(x_0)\| \leqslant \|U^*\| \cdot \|x_0\|$，从而

$$\|U\| \leqslant \|U^*\|. \tag{9}$$

现在由不等式(8)和(9)得到结果.

定理 4　如果 U 是紧算子，则它的伴随算子 U^* 也是紧算子. 换句话说，如果 $\{Y_n\}$ 是 E_1^* 中的有界序列，即 $\|Y_n\| < M$，则存在子序列 $\{Y_{n_i}\}$ 以及 E^* 的元素 X，使得

$$\lim_{i\to\infty} \|U^*(Y_{n_i}) - X\| = 0. \tag{10}$$

证明　由 6.1 节定理 1，算子 U 的值域 $G \subseteq E_1$ 包含可数稠集，由 5.1 节的定理 3，可从序列 $\{Y_n\} \subseteq E_1^*$ 中选取对每个 $y \in G$ 都收敛的子序列 $\{Y_{n_i}\}$，其中对每个 n，$\|Y_n\| < M < \infty$，即对每个 $y \in G$，$\{Y_{n_i}(y)\}$ 收敛. 现在令 $\lim_{i\to\infty} Y_{n_i}[U(x)] = \lim_{i\to\infty} U^*(Y_{n_i})[x] = \lim_{i\to\infty} X_{n_i}(x) = X(x)$，并设 x_i 是 E 的元素，使得

$$\|x_i\| = 1 \text{ 以及 } |X(x_i) - X_{n_i}(x_i)| \geqslant \frac{1}{2}\|X - X_{n_i}\|. \tag{11}$$

现在，如果定理不成立，则存在 $\eta > 0$，使得对每个 $i = 1, 2, \cdots$，有 $\|X - X_{n_i}\| > \eta$，由(11)，令 $Y_i' = Y_{n_i}$，有

$$|Y_i'[U(x_i)] - \lim_{j\to\infty} Y_j'[U(x_i)]| \geqslant \frac{\eta}{2}, \tag{12}$$

以及由于对每个 i 有 $\|x_i\| = 1$，存在指标序列 $\{k_i\}$ 使得 $\lim_{i\to\infty} U(x_{k_i}) = y_0$. 因此对任何 $\varepsilon > 0$，可找到自然数 N，使得对每个 $i > N$ 有 $\|y_0 - U(x_{k_i})\| < \varepsilon$，以及

$$|Y_{k_i}'(y_0) - \lim_{i\to\infty} Y_{k_i}'(y_0)| < \varepsilon,$$

因此

$$|Y'_{k_i}[U(x_{k_i})]-\lim_{i\to\infty}Y'_{k_i}[U(x_{k_i})]|\leqslant|Y'_{k_i}[U(x_{k_i})-y_0]+|Y'_{k_i}(y_0)-\lim_{i\to\infty}Y'_{k_i}(y_0)|$$
$$+|\lim_{i\to\infty}Y'_{k_i}[U(x_{k_i})-y_0]|\leqslant M\cdot\varepsilon+\varepsilon+M\cdot\varepsilon.$$

由(12)这是不可能的，因为 ε 是任意小.

6.4 应用：某些特殊空间中的伴随算子例子

空间 C. 如果 $K(s,t)$ 是 $0\leqslant s\leqslant 1$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的连续函数，则表达式

$$U(x)=\int_0^1 K(s,t)x(s)dt$$

在 C 上定义一个有界线性算子.

设 Y 是 C 上任一有界线性算子，因此它有形式 $Y(y)=\int_0^1 y(t)dY(t)$ (见 4.4 节)，其中 $Y(t)$ 是有界变差函数. 由 $X(x)=Y[U(x)]$ 给出的泛函 $U^*(Y)=X$ 也是 C 上的有界线性泛函，因此也是形式

$$x(x)=\int_0^1 x(t)dX(t), \tag{13}$$

其中 $X(t)$ 也是有界变差函数，可以假设 $X(0)=0$. 因此，如果令

$$y(s)=U(x)(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt, \tag{14}$$

则对任何函数 $x(t)\in C$，有

$$\int_0^1 x(s)dX(s)=\int_0^1 y(s)dX(s). \tag{15}$$

考虑由

$$x_{v,n}(s)=\begin{cases}1, & 对\ 0\leqslant s\leqslant v,\\ 0, & 对\ v+\dfrac{1}{n}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

定义的函数,它对 $v\leqslant s\leqslant v+\dfrac{1}{n}$ 是线性的. 在(14)和(15)中令 x 为 $x_{v,n}$，利用交换积分次序得

$$\int_0^1 x_{v,n}(s)dX(s)=\int_0^1\left[\int_0^1 K(s,t)x_{v,n}(t)dt\right]dY(s)=\int_0^1 x_{v,n}(t)\left[\int_0^1 K(s,t)dY(s)\right]dt$$ ①.

令 $n\to\infty$ 取极限，对 $s=0,1$ 和函数 $X(s)$ 的所有连续点，以及对所有除了至多可数多个点 s，有

$$X(s)=\int_0^s\left[\int_0^1 K(s,t)dY(s)\right]dt\ ; \tag{16}$$

现在，当函数 $X(t)$ 的值在可数多个点(除了 0 和 1)改变时，作为 Stieltjes 积分(13)的值保持相同.可以假设由公式(16)定义的函数 $X(s)$ 在整个[0,1]上有意义，因此它对 $0\leqslant s\leqslant 1$ 连续.

因而，表达式(16)可视为伴随算子 U^* 的表示，由此得知，若 $Y(s)$ 是表示线性泛函 $\int_0^1 y(s)dY(s)$ 的有界变差函数，则对应的 $X(s)$ 是表示有界线性泛函 $\int_0^1 x(t)dX(t)$ 的有界变差函数.

对由

$$U(x)(s)=x(s)-\int_0^1 K(s,t)x(t)dt$$

给出的有界线性算子 U，对相同的函数 $K(s,t)$，有

$$U^*(Y)(t)=Y(t)-\int_0^t dt\int_0^1 K(s,t)dY(s)=X(t).$$

空间 L^p. 如果函数 $K(s,t)$ 对 $0\leqslant s\leqslant 1$ 和 $0\leqslant t\leqslant 1$ 可测，且如果对每对函数 $x(t)\in L^p$ 和 $Y(s)\in L^{q/(q-1)}$，其中 $p>1$，$q>1$，有

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)x(t)Y(s)|\,dsdt<\infty, \tag{17}$$

① 按照连续函数 Stieltjes 二重积分的交换积分次序的下面定理：给定在正方形 $K=[0,1;0,1]$ 上的连续函数 $F(s,t)$ 与 [0,1] 上两个有界变差函数 $g(t)$ 和 $h(t)$，有 $\iint_K F(s,t)dg(s)dh(t)=\int_0^1\left[\int_0^1 F(s,t)dg(s)\right]dh(t)=\int_0^1\left[\int_0^1 F(s,t)dh(t)\right]dg(s)$. 这三个二重积分的第一个是和式 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}F(s_i',t_j')[g(s_{i+1})-g(s_i)][h(t_{j+1})-h(t_j)]$ 当线段 $[s_i,s_{i+1}]$ 和 $[t_j,t_{j+1}]$ 的最大长度趋于 0 时的极限，(其中 $0=s_0<s_1<\cdots<s_i<\cdots<s_{m+1}=1$，以及 $0=t_0<t_1<\cdots<t_j<\cdots<t_{n+1}=1$，点 $s_i'\in[s_i,s_{i+1}]$ 和 $t_j'\in[t_j,t_{j+1}]$ 任意). 定理的证明类似 Riemann 积分.

则由

$$U(x)(s)=y(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt$$

给出的算子U是从L^p到L^q的有界线性算子.

空间L^q上的一般有界线性泛函Y的形式是

$$Y(y)=\int_0^1 Y(s)y(s)ds,$$

其中$Y(s)$是属于$L^{q/(q-1)}$的函数，有

$$Y(s)=\int_0^1 Y(s)ds\int_0^1 K(s,t)x(t)dt=\int_0^1 x(t)dt\int_0^1 K(s,t)Y(s)ds.$$

令

$$X(t)=\int_0^1 K(s,t)Y(s)ds, \tag{18}$$

有

$$\int_0^1 Y(s)y(s)ds=\int_0^1 X(t)x(t)dt.$$

表达式(18)可视为伴随算子U^*的表示.

在特殊情形$p=q>1$，由

$$U(x)(s)=x(s)-\int_0^1 K(s,t)Y(s)dt$$

给出的有界线性算子U的伴随算子的形式是

$$X(t)=U^*(Y)(t)=Y(t)-\int_0^1 K(s,t)x(t)dt.$$

空间L^1. 上述考虑同样可应用于空间L^1. 如果(17)对$x\in L^1$和$Y\in M$成立，则表达式

$$y(s)=U(x)(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt$$

定义了从L^1到它自己的有界线性算子.

伴随算子的形式是

$$X(t)=U^*(Y)(t)=\int_0^1 K(s,t)Y(s)ds,$$

其中 $Y(s)\in M$ 对 $y(s)\in L^1$ 表示有界线性泛函 $\int_0^1 Y(s)y(s)ds$，同时 $X(t)\in M$ 表示有界线性泛函 $\int_0^1 X(t)x(t)dt$，其中 $x(t)\in L^1$. 对对应的一对 X,Y 和 x,y，即 $X=U^*Y$ 和 $y=Ux$，有

$$\int_0^1 X(t)x(t)dt=\int_0^1 Y(s)y(s)ds.$$

第 7 章　双正交序列

7.1　定义与一般性质

元素序列 $\{x_i\}$ 和有界线性泛函序列 $\{f_i\}$ 称为正交，如果

$$f_i(x_j)=\begin{cases}1, & 对\ i=j,\\ 0, & 对\ i\neq j.\end{cases}\tag{1}$$

任给 $x\in E$，级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_i\cdot f_i(x)\tag{2}$$

称为 x 关于双正交序列 $\{x_i\}$ 和 $\{f_i\}$ 的发展.

若序列 $\{f_i\}$ 组成泛函(见 3.3 节)的全集，且级数(2)对某个 x 收敛，则 x 是这个级数的和，事实上，对每个 $j=1,2,\cdots$，有

$$f_j[x-\sum_{i=1}^{\infty}x_i\cdot f_i(x)]=f_j(x)-f_j(x)=0.$$

定理 1　如果级数(2)对每个 $x\in E$ 收敛，则级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)\cdot F(x_i)$$

对每个 $x\in E$ 和任何有界线性泛函 F 也收敛.

证明　令

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f_i\cdot F(x_i),\tag{3}$$

有 $S_n=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\cdot F(x_i)=F[\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot f_i(x)]$，由此，显然对每个 x 序列 $\{S_n(x)\}$ 收敛.

定理 2　如果级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot F(x_i) \tag{4}$$

的部分和(3)对任何有界线性泛函 F 组成范数有界集, 则对每个 $x \in E$ 级数(2)收敛, 它是序列 $\{x_i\}$ 项的线性组合序列的极限.

证明 令

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i(x), \tag{5}$$

有 $F[s_n(x)] = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) \cdot f(x_i) = S_n(x)$ (见(3)), 由假设 $\| S_n \| \leqslant M$, 这里 M 是与 n 无关的数, 对每个 $x \in E$, 由 5.1 节定理 6 有 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \| s_n(x) \| < \infty$. 因此, 由 5.1 节定理 5, 存在与 n 无关的数 N 和 x, 使得 $\| s_n(x) \| \leqslant N \cdot \| x \|$.

现在, 由于对每个 $i = 1,2,\cdots$, 有 $\lim_{n\to\infty} s_n(x_i) = x_i$, 对每个满足定理条件的元素 $x \in E$, 经简单论证得知 $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ 的存在性.

定理 3 若级数(2)的部分和(5)对任何 $x \in E$ 组成范数有界集, 则级数(4)对每个泛函 F 收敛, 它是序列 $\{f_i\}$ 项的线性组合序列的极限.

证明类似于上面的定理 2.

定理 4 在相同的假设下, 如果 $\{z_i\}$ 是基本序列, 则级数(2)对每个 $x \in E$ 收敛.

证明 由(5)对每个 $x \in E$ 有 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \| s_n(x) \| < \infty$, 此外, 对每个 $i = 1,2,\cdots$, 有 $\lim_{n\to\infty} s_n(x_i) = x_i$. 级数(2)对每个 $x \in E$ 的收敛性由 5.1 节的定理 5 和定理 3 得知.

7.2 某些特殊空间中的双正交序列

现在考虑在某些空间中的双正交序列.

令

$$\int_0^1 x_i(t) y_j(t) dt = \begin{cases} 1, & 对\ i = j, \\ 0, & 对\ i \neq j. \end{cases} \tag{6}$$

进一步假设 $\{x_i(t)\}$ 是 L^p 中的函数序列, 其中 $p > 1$, $\{y_i(t)\}$ 是 $L^{p/(p-1)}$ 中的序列, 最后假设这些序列是完全的(或者, 等价地是闭的).

定理 5　在这些假设下，如果级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t)\int_0^1 y_i(t)x(t)dt$$

对任何函数 $x(t)\in L^p$ 是 p 次方平均收敛，则级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t)\int_0^1 x_i(t)y(t)dt \tag{7}$$

对任何函数 $y(t)\in L^{p/(p-1)}$ 是 $\dfrac{p}{p-1}$ 次方平均收敛.

证明　设 L^p 上有界线性泛函 f_i 由

$$f_i(x)=\int_0^1 y_i(t)x(t)dt,\quad 对\ x(t)\in L^p$$

定义.

于是由假设，级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\cdot f_i(x)$ 对每个 $x\in L^p$ 按范数 p 次方收敛. 由 7.1 节定理 3，级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i\cdot F(x_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i(t)\int_0^1 x_i(t)y(t)dt$ 对每个定义在 L^p 中的有界线性泛函 F 是 $\dfrac{p}{p-1}$ 次方平均或者范数收敛，其中 $y(t)\in L^{p/(p-1)}$. 因此，对每个函数 $y(t)\in L^{p/(p-1)}$，级数(7)也同样成立，证毕.

特别，当 $x_i(t)=y_i(t)\in L^r$ 时，其中 r 是两个数 p 和 $\dfrac{p}{p-1}$ 的较大者，由刚才证明的定理得知下面的推论成立.

如果级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t)\int_0^1 x_i(t)x(t)dt \tag{8}$$

对每个 $x\in L^p$ 是 p 次方平均收敛，则对每个 $x\in L^{p/(p-1)}$，它是 $p/(p-1)$ 次方平均收敛.

例如，对 $i=1,2,\cdots$，可取 x_i 为(本质)有界函数.

现在考虑假设(6)中的 $\{x_i(t)\}$ 是 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的可积函数，$\{y_i(t)\}$ 是 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的有界函数序列的情形. 最后假设序列 $\{x_i(t)\}$ 在 L^1 是完全的.

定理 6 在这些假设下，如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t)\int_0^1 y_i(t)x(t)dt$ 对每个 $x(t)\in L^1$ 平均收敛，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t)\int_0^1 x_i(t)y(t)dt$ 对每个 $y(t)\in M$ 几乎处处有界，反之亦然.

证明类似于上面定理 5 的证明：视 x_i 为区域 L^1 的元素，y_i 为有界线性泛函的表示，并应用 6.3 节定理 3 和定理 4.

特别，当 $x_i(t)=y_i(t)$ 时，有下面推论：

① 如果级数(8)对每个 $x(t)\in L^1$ 平均收敛，其中 $x_i(t)=y_i(t)\in M$，则它对每个 $x(t)\in L^1$ 有界，反之亦然.

② 如果级数(8)对每个 $x(t)\in C$ 一致收敛，其中 $x_i(t)=y_i(t)\in C$，则它对每个 $x(t)\in L^1$ 平均收敛，反之亦然.

证明如下：一方面，视 x_i 为区域 C 的元素，而 $y_i=x_i$ 为有界线性泛函的表示；另一方面，视 x_i 为区域 L^1 的元素，而 $y_i=x_i$ 为 L^1 上的有界线性泛函的表示.

7.3 Banach 空间中的基

E 的元素序列 $\{x_i\}$ 称为(Schauder)基①，如果对每个 $x\in E$，存在唯一数列 $\{\eta_i\}$，使得

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i.$$

给定基 $\{x_i\}$，设 E_1 是序列 $y=\{\eta_i\}$ 的集合，对此级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i$ 收敛. 令

$$\|y\|=\sup_{1<n}\left\|\sum_{i=1}^{n}\eta_i x_i\right\|,$$

容易证明 E_1 按此范数是 Banach 空间.

现在令

$$x=U(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i,\quad 对每个序列\ y=\{\eta_i\}\in E_1.$$

---

① 这个概念在一般情形是 M. J. Schauder 引入的 (Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. Math. Zeitschr, 1927, 26: 47-65).

因此，U 定义了一个有界线性算子，因为 $\|U(y)\| \leqslant \|y\|$，它将 E_1 双射为 E，它的逆也是有界线性算子.

最后，由

$$f_i(x) = \eta_i, \quad \text{其中 } x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$$

定义的映射 f_i 是有界线性泛函，因为 $\|\eta_i x_i\| \leqslant 2\|y\|$，以及

$$|f_i(x)| = |\eta_i| \leqslant \frac{2}{\|x_i\|}\|y\| \leqslant \frac{2}{\|x_i\|}\|U^{-1}\| \cdot \|x\|.$$

于是有

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x), \quad \text{对每个 } x \in E,$$

这个发展是唯一的，由关系式(1)得知，序列 $\{x_i\},\{f_i\}$ 是双正交序列.

注意到对每个定义在 E 上的有界线性泛函 F，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)F(x_i)$ 收敛于 $F(x)$，因为对每个 $x \in E$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)F(x_i) = \lim_{n\to\infty} F\left[\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x)\right] = F(x).$$

不能确定每个可分的 Banach 空间是否有基.

这个问题仅对某些特殊的空间有解. 例如，在空间 L^p，其中 $p \geqslant 1$，基由正交的 Haar 系给出；空间 C 中的基由 Schauder 构造；在空间 l^p，对 $p \geqslant 1$，基由序列 $\{x_i\}$ 提供，其中

$$x_i = \{\xi_n^i\}, \quad \xi_n^i = \begin{cases} 1, & \text{对 } i = n, \\ 0, & \text{对 } i \neq n. \end{cases}$$

于是对 $x = \{\xi_i\}$ 有 $f_i(x) = \xi_i$. 最后，空间 c 中的基是由与元素 $x_0 = \{\xi_n^0\}$ 一起的相同序列给出，其中 $\xi_n^0 = 1$，对 $n = 1, 2, \cdots$. 于是有 $f_0(x) = \lim_{i\to\infty} \xi_i$，对 $x = \{\xi_i\} \in c$.

7.4 正交展开理论的某些应用

定理 7 假设序列 $\{x_i\},\{f_i\}$ 和 $\{y_i\},\{\varphi_i\}$ 是双正交序列，对每个 x 方程 $f_i(x)=\varphi_i(y)$, $(i=1,2,\cdots)$ 恰有一个解 $y=U(x)$，则对每个数列 $\{h_i\}$，由级数 $\sum_{i=1}^{\infty}h_ix_i$ 的收敛性得知级数 $\sum_{i=1}^{\infty}h_iy_i$ 的收敛性.

证明 容易看到，如果 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ 以及 $\lim_{n\to\infty}y_n=y_0$，其中 $y_n=U(x_n)$，则 $y_0=U(x_0)$. 由 3.3 节定理 7 得知算子 U 有界且线性. 因此，若令 $\|U\|=M$，则有 $\|U(x)\|\leqslant M\|x\|$，以及由定义，$U(x_i)=y_i$，$i=1,2,\cdots$，对任何实数 h_i，得知

$$U\left(\sum_{i=1}^{n}h_ix_i\right)=\sum_{i=1}^{n}h_iy_i,$$

由此，定理立刻得知.

推论 假设 $\{x_i(t)\}$ 和 $\{y_i(t)\}$ 是连续函数的正交序列，且对每个连续函数 $x(t)$，存在唯一连续函数 $y(t)$，使得

$$\int_0^1 x_i(t)x(t)dt=\int_0^1 y_i(t)y(t)dt,$$

则如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty}h_ix_i(t)$ 一致收敛，那么级数 $\sum_{i=1}^{\infty}h_iy_i(t)$ 也一致收敛.

对其他的函数空间类似的推论也成立①.

定理 8 设 $\{x_i\},\{f_i\}$ 是双正交序列，其中 $\{f_i\}$ 是全序列. 令 $\{h_i\}$ 是数列，使得只要 $\{\alpha_i\}$ 是元素 x 的系数序列(即 $\alpha_i=f_i(x)$，对 $i=1,2,\cdots$)，则 $\{h_i\alpha_i\}$ 是元素 y 的系数序列.

如果在这些假设下，$\{\beta_i\}$ 是有界线性泛函 F 的系数序列(即 $\beta_i=F(x_i)$，对 $i=1,2,\cdots$)，则序列 $\{h_i\beta_i\}$ 也是某个有界线性泛函 φ 的系数序列.

证明 由假设对 $i=1,2,\cdots$，方程组 $h_if_i(x)=f_i(y)$ 对每个 x 恰有一个解，记为 $y=U(x)$.

---

① 参看 S. Banach. Sur une propriété caracteristique des fonctions orthogonales. Comptes 180. Paris, 1925: 1637-1640 以及 H. Steinhaus. Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la thèorie des séries orthogonales. Stud. Math. L, 1929: 191-200.

由方程 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 和 $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$，显然得知 $y_0 = U(x_0)$，其中 $y_n = U(x_n)$. 因此由 3.3 节定理 7, U 是有界线性算子. 特别, 容易验证

$$U(x_i) = h_i x_i, \quad 对每个\ i = 1, 2, \cdots. \tag{9}$$

现在, 给定有界线性泛函 F，使得 $\beta_i = F(x_i)$，对 $i = 1, 2, \cdots$，由(9)有 $F[U(x_i)] = h_i F(x_i) = h_i \beta_i$，即数 $h_i \beta_i$ 是泛函 $\Phi = U^*(F)$ 的系数, 证毕.

注意, 如果 $x = \lim_{i\to\infty} x_i$，由(9), $U(x)$ 是序列 $\{x_i\}$ 项的线性组合的极限.

作为此注意的一个简单应用, 得到下面的定理.

定理 9　设 $\{x_i(t)\}$ 是连续函数的正交序列, 它也是空间 C 中的闭序列. 如果数列 $\{h_i\}$ 将有界函数的每个系数序列 $\{\alpha_i\}$ 变换成另一个有界函数的系数序列 $\{h_i \alpha_i\}$，则它将任何一个连续函数的每个系数序列 $\{\beta_i\}$ 变成另一个连续函数的系数序列 $\{h_i \beta_i\}$.

这个定理的逆也真.

最后, 有

定理 10　设 $\{x_i(t)\}$ 是 $L^{p/(p-1)}$ 中有界函数的完全正交序列, 其中 $p > 1$. 如果数列 $\{h_i\}$ 将任意函数 $x(t) \in L^p$ 的系数序列 $\{\alpha_i\}$ 变换成另一个函数 $y(t) \in L^p$ 的系数序列 $\{h_i \alpha_i\}$，则它也将任何函数 $\overline{x}(t) \in L^{p/(p-1)}$ 的系数序列 $\{\beta_i\}$ 变换成函数 $\overline{y}(t) \in L^{p/(p-1)}$ 的系数序列 $\{h_i \beta_i\}$. 如果 $p = \infty$，那么 $L^p = M$[①].

---

① 参看 W. Orlicz. Beiträge zur Theorie der Orthogona lentwicklungen Stud. Math. L, 1929: 1-39 和 241-255.

第 8 章　Banach 空间中的线性泛函

8.1　预 备 知 识

给定一个闭线性子空间 $G \subseteq E$，以及 E 上有界线性泛函的对偶空间 E^*，已经看到(见 4.3 节的引理)，对任何元素 $x_0 \in E \setminus G$，存在泛函 $f \in E^*$，使得

$$f_0(x) = 1 \text{ 和 } f(x) = 0, \quad \text{对每个} f \in G.$$

反之，自然要问，子空间 $\Gamma \subseteq E^*$ 和 E 的元素之间的类似关系是否成立. 为确切起见，要求知道给定一个闭线性子空间 $\Gamma \subseteq E^*$，对任意泛函 $f_0 \in E^* \setminus \Gamma$ 是否存在元素 $x \in E$，使得

$$f_0(x) = 1 \text{ 和 } f(x) = 0, \quad \text{对每个} f \in G. \tag{1}$$

但是回答一般是否定的.

事实上，取 $E = c$ 为实数的收敛序列空间，故 E^* 是 c 的对偶空间. 设 Γ 是 E^* 中所有满足如下条件的元素 f 的空间：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i, \quad \text{其中 } x = \{\xi_i\} \in c \text{ 和 } \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty. \tag{2}$$

因此 Γ 是 E^* 的闭线性子空间. 事实上，假设

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \| = 0, \tag{3}$$

其中

$$f_n \in \Gamma \text{ 和 } f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(n)} \xi_i, \quad \text{对 } n = 1, 2, \cdots, \tag{4}$$

要证明 $f \in \Gamma$. 现在由(3)得 $\lim\limits_{p,q \to \infty} \| f_p - f_q \| = 0$，因此，由定义得

$$f_p(x) - f_q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_i^{(p)} - \alpha_i^{(q)} \right) \xi_i,$$

从 4.4 节的定理由(3)得

$$\lim_{p,q\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i^{(p)}-\alpha_i^{(q)}|=0,$$

故存在序列 $\{\alpha_i\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i^{(n)}-\alpha_i|=0 \text{ 和 } \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty.$$

因而，对每个 $x\in\{\xi_i\}\in c$，有等式

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{(n)}\xi_i=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i,$$

从而由(4)有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i.$$

又由(3)

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|\cdot\|x\|=0,$$

由此得知对每个 $x\in c$，有 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$. 因此泛函 f 的形式是(2)，所以，最后有 $f\in\Gamma$.

这就建立了

$$f_0(x)=\lim_{i\to\infty}\xi_i,\quad \text{对 } x=\{\xi_i\}\in c. \tag{5}$$

显然如此定义的 f_0 不属于 Γ. 但是不存在满足条件(1)的 $x_0=\xi_i^{(0)}\in c$，因为由(1)和(5)得 $\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i^{(0)}=1$，对每个满足条件(2)的数列 $\{\alpha_i\}$，就不可能按(1)要求有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i^{(0)}=0$.

8.2　线性泛函空间的正则闭线性空间

Banach 空间 E 的对偶空间 E^* 的线性子空间 Γ 称为是正则闭的，如果对 $E^*\setminus\Gamma$ 的每个元素存在满足条件(1)的元素 $x_0\in E$.

已知 E^* 的闭线性子空间并不总是正则闭的. 但是，其逆成立，即 E^* 的每个正则闭线性子空间 Γ 按范数也是闭的.

事实上，令

$$f_n\in\Gamma,\quad 对\ n=1,2,\cdots,\tag{6}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f_0\|=0.\tag{7}$$

如果 f_0 不属于正则闭线性子空间 Γ，则存在满足(1)的 $x_0\in E$，特别，由(6)有 $f_n(x_0)=0$，对 $n=1,2,\cdots$，因此，由(7)得 $f_0(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=0$，与(1)矛盾. 从而必须有 $f_0\in\Gamma$，即空间 Γ 按范数是闭的.

容易给出正则闭空间的例子. 事实上，设 E 是 Banach 空间，$G\subseteq E$ 是 E 的任一线性子空间. 定义在 E 上满足

$$f(x)=0,\quad 对每个\ x\in G$$

的有界线性泛函 f 的集合 Γ 显然是正则闭的.

附注　若问题中的集合 Γ 不仅是正则闭线性子空间且也是全的，则它与整个 E^* 重合.

事实上，由全子集的定义(见 3.3 节)得知，E 中使得所有 $f\in\Gamma$ 为零的元素只有(零)元素 Θ.

现在讨论有界线性泛函正则闭空间的性质[①].

8.3　有界线性泛函的超限闭集

任给一个有序数 θ，它是极限序数，即它没有紧接前元，以及 θ 型的有界实数序列 $\{C_\xi\}$，其中 $1\leqslant\xi<\theta$；$\{C_\xi\}$ 的超限上极限 $\overline{\lim\limits_{\xi\to\theta}}C_\xi$ 定义为实数集

① 参看 S.Banach. 同前. Studia Mathematica I: 228-234，其中他发现了本章 8.3~8.5 的这些定理.

$\{t$:存在依赖于t 的序数$\eta(\eta<\theta)$, 使得对所有$\xi>\eta$有$C_\xi \leqslant t\}$ 的下确界. 于是 $\{C_\xi\}$ 的超限下极限由公式

$$\underline{\lim_{\xi\to\theta}} C_\xi = -\overline{\lim_{\xi\to\theta}}(-C_\xi)$$

定义.

引理 1　若对 E 上的有界线性泛函的 θ 型的序列 $\{f_\xi\}$ 有

$$\| f_\xi \| \leqslant M, \quad 对\ 1 \leqslant \xi < \theta,$$

则存在满足下面条件的有界线性泛函 f:

$$\| f \| \leqslant M \ 和\ \underline{\lim_{\xi\to\theta}} f_\xi(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim_{\xi\to\theta}} f_\xi(x), \quad 对每个\ x \in E. \tag{8}$$

证明由 2.2 节定理 1 得知, 其中令 $p(x)=\overline{\lim_{\xi\to\theta}} f_\xi(x)$. 泛函 p 对 $x\in E$ 也满足 $p(x)\leqslant M\|x\|$.

建立了这个引理, 称满足条件(8)的有界线性泛函 f 为序列 $\{f_\xi\}$ 的**超限极限**.

特别, 当 $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|=0$ 时, 泛函 f 显然是序列 $\{f_n\}$ 的超限极限, 因为对每个 $x\in E$,有 $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)=f(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$.

有界线性泛函的线性空间 Γ 称为**超限闭**, 如果 Γ 元素的每个范数有界的超限序列 $\{f_\xi\}$ 在 Γ 内有超限极限 f.

每个超限闭空间 Γ 也是范数闭的.

事实上, 对每个 $x\in E$, 公式(6)和(7)给出 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x)$, 以及由于满足条件 $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ 的每个泛函 f 与泛函 f_0 重合, 因此 f_0 是序列 $\{f_n\}$ 仅有的超限极限, 故 $f_0\in\Gamma$ 是范数闭的.

引理 2　给定在 E 上有界线性泛函的超限闭线性空间 Γ 和 E 上不属于 Γ 的有界线性泛函 f_0, 对每个满足条件

$$0 < M < \| f - f_0 \|, \quad 对每个\ f \in \Gamma \tag{9}$$

的数 M , 存在元素 $x_0\in E$, 使得

$$f_0(x_0)=1, \quad f(x_0)=0, \quad 对每个\ f\in\Gamma\ 和\ \|x_0\|<\frac{1}{M}.$$

证明 对任何满足 $M_1 = M$ 的递增趋于无穷的数列 $\{M_i\}$，设 m 表示满足下面条件的最大基数：给定基数小于 m 的任何集合 $G \subseteq E$，存在元素 $f \in \Gamma$，使得

$$\| f \| \leqslant M_2 \text{ 和 } | f(x) - f_0(x) | \leqslant M_1 \cdot | x |, \quad \text{对每个 } x \in G. \tag{10}$$

注意这样定义的数 m 不会超过 E 的基数，因为如果存在 $f \in \Gamma$ 使得对每个 $x \in E$ 有 $| f(x) - f_0(x) | \leqslant M_1 \cdot \| x \|$，就有 $\| f - f_0 \| \leqslant M_1 = M$，而这与假设(9)矛盾.

这就是说，现在将证明这个 m 是有限数.

事实上，假设 m 不是有限的，考虑势 m 的任何集合 $G \subseteq E$．排列 G 中的元素为超限序列 $\{ x_\xi \}$，其中 $1 \leqslant \xi \leqslant \theta$，$\theta$ 是势 m 的最小基数，显然 θ 是极限基数. 因此，对每个基数 $\eta < \theta$，序列 $\{x_\xi\}$ 的项的集合的势小于 m，其中 $1 \leqslant \xi \leqslant \eta$．故由 m 的定义对每个 $\eta < \theta$，存在线性泛函 $f_n \in \Gamma$，使得

$$\| f_\eta \| \leqslant M_2 \text{ 和 } | f_\eta(x_\xi) - f_0(x_\xi) | \leqslant M_1 \cdot \| x \|, \quad \text{对每个 } \xi < \eta. \tag{11}$$

由于假设 Γ 是超限闭，存在元素 $f \in \Gamma$，它是序列 $\{f_\eta\}$ 的超限极限，其中 $1 \leqslant \eta < \theta$，因此由(11)，对 $1 \leqslant \xi < \theta$ 满足条件 $\| f \| \leqslant M_2$ 和 $| f(x_\xi) - f_0(x_\xi) | \leqslant M_1 \| x_\xi \|$，即满足条件(10). 假设 m 是无穷，则对每个势 m 的集合 $G \subseteq E$，存在满足(10)的 $f \in \Gamma$，这与 m 的定义矛盾.

现在由于 m 是有限，故存在有限集 $G_1 \subseteq E$，使得没有属于 Γ 的泛函 f 满足条件

$$\| f \| \leqslant M_2 \text{ 和 } | f(x) - f_0(x) | \leqslant M_1 \| x \|, \quad \text{对 } x \in G_1.$$

由归纳法容易建立 E 的有限子集的序列 $\{G_i\}$ 的存在性，使得对某个 k 没有满足条件

$$| f(x) - f_0(x) | \leqslant M_i \| x \|, \quad \text{对 } x \in G_i \text{ 和 } i = 1, 2, \cdots \tag{12}$$

的泛函 f 属于 Γ.

现在可以假设集合 G_i 有范数等于 M_1 / M_i 的元素，其中 $i = 1, 2, \cdots$，只不过必须将这些元素乘上适当的数. 于是如果这些集合的元素排列为序列 $\{x_n\}$，先记下 G_1 的元素，再跟着 G_2 的元素,…，得到

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \theta \text{ 和 } \| x_n \| \leqslant 1, \quad \text{对 } n = 1, 2, \cdots; \tag{13}$$

如果

$$|f(x_n)-f_0(x_n)|\leqslant M_1,\quad \text{对 } i=1,2,\cdots, \tag{14}$$

则泛函 f 不属于 Γ.

设 G_0 表示形如 $\{f(x_n)\}$ 的所有序列的集合，其中 $f\in\Gamma$．显然 $G_0\subseteq c$ 和 $\{f_0(x_n)\}\in c$．由(14)得知 $\{f_0(x_n)\}$ 到线性空间 G_0 的距离 $\geqslant M_1$．由空间 c 中有界线性泛函的一般形式(见 4.4 节)和 4.3 节的引理，令 $G=G_0$，存在数列 $\{C_n\}$ 和数 C，使得

$$C\lim_{n\to\infty}f_0(x_n)+\sum_{n=1}^{\infty}C_nf_0(x_n)=1, \tag{15}$$

$$C\lim_{n\to\infty}f(x_n)+\sum_{n=1}^{\infty}C_nf(x_n)=0,\quad \text{对 } f\in\Gamma, \tag{16}$$

以及

$$|C|+\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\leqslant\frac{1}{M_1}. \tag{17}$$

因此，若令 $x_0=\sum_{n=1}^{\infty}C_nx_n$，最后由(15)~(17)，并利用(13)对每个 $f\in\Gamma$，得到

$f_0(x_0)=1,\ f(x)=1$，与 $\|x_0\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|\cdot\|x_n\|\leqslant\frac{1}{M_1}=\frac{1}{M}$，证毕.

由刚才证明的引理 2 得到下面的

引理 3　正则闭和超限闭的概念对有界线性泛函的线性空间是相同的.

证明　如果有界线性泛函的线性空间 Γ 是超限闭的，同时也是范数闭，由引理 2 立刻得知 Γ 是正则闭.

反之，设 Γ 是有界线性泛函的正则闭线性空间，$\{f_\xi\}$ 是 Γ 的 θ 型元素的任意范数有界序列，f_0 是任一泛函，它是序列 $\{f_\xi\}$ 的超限极限，于是有

$$\varliminf_{\xi\to\theta}f_\xi(x)\leqslant f_0(x)\leqslant\varlimsup_{\xi\to\theta}f_\xi(x),\quad \text{对每个 } x\in E. \tag{18}$$

从而，如果 f_0 不属于 Γ，则由 Γ 的定义存在满足条件(1)的元素 $x\in E$，特别 $f_\xi(x)=0$，这与(18)矛盾．因此 $f_0\in\Gamma$，由此得知 Γ 是超限闭的.

由引理 2 和 3 得到下面的

定理 1　在 E 上给定有界线性泛函的正则闭线性空间 Γ，以及不属于 Γ 的有界线性泛函 f_0，则对每个满足条件

$$0 < M < \| f - f_0 \|, \quad 对每个 f \in E$$

的数 M，存在元素 $x_0 \in E$，使得

$$f_0(x_0) = 1, \quad f(x_0) = 0, \quad 对每个 f \in \Gamma 和 \| x_0 \| < \frac{1}{M}.$$

8.4 有界线性泛函的弱收敛性

有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ 称为弱收敛于泛函 f，如果

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \quad 对一切 f \in E.$$

泛函 f 称为序列 $\{f_n\}$ 的**弱极限**.

由此得知泛函 f 是加性和 B 可测，因此按照 1.3 节的定理 4，它是有界线性泛函.

此外，由 5.1 节的定理 5 范数序列 $\{\| f_n \|\}$ 有界. 最后，有

$$\| f \| \leqslant \underline{\lim}_{n \to \infty} \| f_n \|, \tag{19}$$

因为由序列 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f，得知对每个 x 有 $\lim\limits_{n \to \infty} | f_n(x) | = | f(x) |$，以及由于对 $n = 1, 2, \cdots$，有 $| f_n(x) | \leqslant \| f_n \| \cdot \| x \|$，从而有 $| f_n(x) | \leqslant \| x \| \cdot \underline{\lim}\limits_{n \to \infty} \| f_n \|$，由此得(19).

容易得到下面的

定理 2 有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ 弱收敛于泛函 f 的充分必要条件是下面两个条件成立：

$$序列 \{\| f_n \|\} 有界 \tag{20}$$

和

$$对每个属于稠(基本)集的 x, \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) 成立. \tag{21}$$

定理 3 如果空间 E 是可分的，则每个范数有界的有界线性泛函序列 $\{f_n\}$ 有弱收敛的子序列.

证明 只需从序列 $\{f_n\}$ 选取子序列，它在 E 的可数稠子集的每一点收敛，而这可由对角线方法容易地得到.

8.5　可分 Banach 空间中有界线性泛函的弱闭集

给定两个有界线性泛函的集合 Δ 和 Γ，其中 $\Delta \subseteq \Gamma$，集合 Δ 称为在 Γ 中是弱稠的，如果对每个 $f \in \Gamma$ 存在弱收敛于 f 的序列 $\{f_n\} \subseteq \Delta$.

有界线性泛函的集合 Γ 称为弱闭的，如果 Γ 包含每个 Γ 泛函序列的弱极限泛函 f .

定理 4　如果 E 是可分的，则 E 上每个有界线性泛函集合 Γ 包含在 Γ 内是弱稠的可数子集 Δ .

证明　只需考虑集合 Γ 是范数有界的情形，因为每个有界线性泛函集合是至多可数个具有这种性质的集合的并.

设 $\{x_n\}$ 是 E 中的稠序列，对 $n=1,2,\cdots$，Z_n 是以

$$Z_n = \{(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)) : f \in \Gamma\} \tag{22}$$

定义的 n 维空间中的子集. 对每个 n，显然存在 Γ 的可数子集 Δ_n，使得对 $f \in \Delta_n$，Z_n 的点的子集在 Z_n 中稠. 显然集合 $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ 是可数的，且对每个 $f \in \Gamma$，存在序列 $\{f_n\} \subseteq \Delta_n \subseteq \Delta$，使得对每个 $i=1,2,\cdots,n$，有 $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{n}$，因此它弱收敛于 f，因为由假设 $\{f_n\} \subseteq \Delta_n \subseteq \Delta$，$\{f_n\}$ 范数有界.

定理 5　对可分的 Banach 空间 E，正则闭和弱闭概念与 E 上有界线性泛函的线性空间相同.

证明　首先，设 $\{f_n\}$ 是弱收敛于 f_0 的属于 Γ 的有界线性泛函序列.

于是有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x), \quad 对每个 x \in E. \tag{23}$$

如果 f_0 不属于集合 Γ，假设它是正则闭，则由这个概念的定义，存在元素 $x_0 \in E$ 满足条件

$$f_0(x_0) = 1 \ 和 \ f(x_0) = 0, \quad 对 f \in \Gamma. \tag{24}$$

由于 $\{f_n\} \subseteq \Gamma$，因此，对每个 $n=1,2,\cdots$，有 $f_n(x_0) = 0$，故由(23)有 $f_0(x_0) = 0$，这与(24)矛盾. 由此得知 $f_0 \in \Gamma$，因此集合 Γ 是弱闭的.

附注　注意 E 的可分性在这部分证明中没有起任何作用.

另一方面，由 8.3 节引理 3，只需证明如果集合 Γ 是弱闭，它是超限闭就够了.

设$\{f_\xi\}$是θ型序列，使得

$$f_\xi \in \Gamma \text{ 和 } \|f_\xi\| \leqslant M, \quad \text{对 } 1 \leqslant \xi < \theta, \tag{25}$$

以及设$\{x_i\}$是E中稠序列. 由假设对每个自然数n，存在序数ξ_n使得

$$\varliminf_{\xi \to \theta} f_\xi(x_i) - \frac{1}{n} \leqslant f_{\xi_n}(x_i) \leqslant \varlimsup_{\xi \to \theta} f_\xi(x_i) + \frac{1}{n}, \quad \text{对 } 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{26}$$

现在由于E是可分的，由 8.4 节定理 3 可以从序列$\{f_{\xi_n}\}$选取弱收敛子序列. 记f是序列$\{f_{\xi_n}\}$的弱极限，由(25)得知$f \in \Gamma$，进一步由(26)得知f是序列$\{f_\xi\}$的超限极限.

由 8.3 节定理 1 和 8.5 节定理 5 得下面的

定理 6 如果 Banach 空间E是可分的，则在E上给定一个有界线性泛函的弱闭线性空间Γ，以及任何一个不属于Γ的有界线性泛函f_0，对每个满足条件

$$0 < M < \|f - f_0\|, \quad \text{对每个 } f \in \Gamma$$

的数M，存在元素$x_0 \in E$使得

$$f_0(x_0) = 1, \quad f(x_0) = 0, \quad \text{对每个 } f \in \Gamma \text{ 和 } \|x_0\| < \frac{1}{M}.$$

由 8.3 节引理 3 和 8.5 节定理 5 得知，在有界线性泛函的线性空间中的正则，超限闭和弱闭概念对可分的 Banach 空间E都是等价的.

回忆前面的附注，得知下面的

定理 7 如果 Banach 空间E是可分的，Γ是E上有界线性泛函的集合，它不仅是弱闭线性空间，而且是全的，则Γ包含E中每个有界线性泛函(即$\Gamma = E^*$).

8.6 空间 C, L^r, c 和 l^p 中的有界线性泛函的弱收敛性条件

下面继续研究在几个特殊的可分 Banach 空间，即空间C, $L^p(p \geqslant 1)$, c和$l^p(p \geqslant 1)$中的有界线性泛函的弱收敛性.

对可数稠集，取：在空间C和L^p分别是有理系数的多项式，在空间c和l^p则分别为最终常数的有理数列和最终零的有理数列.

空间L^p, $p \geqslant 1$. 由于L^p中的每个有界线性泛函f的形式为(见 4.4 节)

$$\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt, \quad 其中\ \alpha(t) \in L^{p/(p-1)}, \tag{27}$$

泛函序列

$$\{f_n\}, \quad 其中\ f_n(x) = \int_0^1 x(t)\alpha_n(t)dt\ 和\ \alpha_n(t) \in L^{p/(p-1)} \tag{28}$$

弱收敛于由(27)给出的泛函，于是对每个函数 $x(t) \in L^p$，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t)\alpha_n(t)dt = \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt. \tag{29}$$

现在，可容易地证明，序列(28)弱收敛于泛函(27)的充分必要条件是

$$序列\ \left(\int_0^1 |\alpha_n(t)|^{p/(p-1)}\, dt\right)有界 \tag{30}$$

和

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^u \alpha_n(t)dt = \int_0^u \alpha(t)dt, \quad 对\ 0 \leqslant u \leqslant 1 \tag{31}$$

都成立①.

证明由 8.4 节定理 2 得知，进一步给出

$$\| f_n \| = \left[\int_0^1 |\alpha_n(t)|^{p/(p-1)}\, dt\right]^{(p-1)/p},$$

对 $0 \leqslant u \leqslant 1$，由

$$x_u(t) = \begin{cases} 1, & 对\ 0 \leqslant t \leqslant u \\ 0, & 对\ u \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

定义的函数 $x_u(t)$ 组成 L^p 的全子集，最后对 $n = 1, 2, \cdots$，有

$$\int_0^1 x_u(t)\alpha_n(t)dt = \int_0^u \alpha_n(t)dt.$$

空间 L^1. 由于 L^1 上的每个有界线性泛函 f 有形式(见 4.4 节)

① 这个条件是由 F. Riesz. 同前. Math. Ann, 1910, 69: 449-497 给出.

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt,\quad 其中\ \alpha(t)\in M, \tag{32}$$

泛函序列

$$\{f_n\},\quad 其中\ f_n(x)=\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)dt\ 和\ \alpha_n(t)\in M \tag{33}$$

弱收敛于由(32)给定的泛函，如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)dt=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt,\quad 对每个\ x(t)\in L^1. \tag{34}$$

如在上一情形可证明线性泛函序列(33)弱收敛于泛函(32)，当且仅当

$$序列\{\alpha_n(t)\}是\ M\ 的范数有界子集 \tag{35}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^u \alpha_n(t)dt=\int_0^u \alpha(t)dt,\quad 对每个满足\ 0\leqslant u\leqslant 1\ 的\ u \tag{36}$$

都满足①.

附注 条件(30)和(31)显然是性质(29)成立的充分必要条件. 条件(35)和(36)对性质(34)同样成立.

空间 l^p，$p\geqslant 1$. 由于 l^p 上的每个有界线性泛函 f 的形式是(见 4.4 节)

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i,\quad 其中 x=\{\xi_i\}\in l^p\ 和\ \{\alpha_i\}\in\begin{cases} l^{p/(p-1)}, & 对\ p>1,\\ M, & 对\ p=1,\end{cases} \tag{37}$$

泛函序列

$$\{f_n\},\quad 其中\ f_n(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\xi_n\ 和\ \{\alpha_{in}\}\in\begin{cases} l^{p/(p-1)}, & 对\ p>1,\\ M, & 对\ p=1,\end{cases} \tag{38}$$

弱收敛于泛函(37)，如果

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\xi_i=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i,\quad 对每个\ x=\{\xi_i\}\in l^p. \tag{39}$$

---

① 这个条件是 M. B. Lebesgue 发现的.

线性泛函序列(38)弱收敛于泛函(37)的充分必要条件是

$$\text{序列}\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{in}|^{p/(p-1)}\right), & \text{对 } p>1 \\ \left(\sup_{i\geq 1}|\alpha_{in}|\right), & \text{对 } p=1\end{cases}\text{有界} \tag{40}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{in}=\alpha_i, \quad \text{对 } i=1,2,\cdots \tag{41}$$

都成立.

证明由 8.4 节定理 2 得到, 考虑到元素

$$x_j=\{\xi_{ij}\}, \quad \text{其中 } \xi_{ij}=\begin{cases}1, & \text{对 } i=j, \\ 0, & \text{对 } i\neq j\end{cases}$$

组成 l^p 中的全序列, 此外, 对所有的自然数 j 和 n, 有 $f_n(x_j)=\alpha_{jn}$, 最后应用 4.4 节给出的 l^p 上有界线性泛函范数的表达式.

附注　条件(40)和(41)也是(39)成立的充分必要条件.

空间 c. 考虑到 c 上有界线性泛函 f 的一般形式(见 4.4 节)给出

$$f(x)=A\lim_{i\to\infty}\xi_i+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i, \quad \text{其中 } x=\{\xi_i\}\in c \text{ 和 } \{\alpha_i\}\in l^1, \tag{42}$$

有界线性泛函序列

$$\{f_n\}, \quad \text{其中 } f_n(x)=A_n\lim_{i\to\infty}\xi_i+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\xi_i \text{ 和 } \{\alpha_{in}\}\in l^1, \quad \text{对 } n=1,2,\cdots \tag{43}$$

弱收敛于泛函(42), 如果

$$\lim_{n\to\infty}\left[A_n\lim_{n\to\infty}\xi_i+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\xi_i\right]=A\lim_{n\to\infty}\xi_i+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\xi_i, \quad \text{对每个} x=\{\xi_i\}\in c. \tag{44}$$

容易证明序列(43)弱收敛于泛函 (42) 的充分必要条件是：同时有

$$\text{序列}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{in}|+|A_n|\right\}\text{有界,} \tag{45}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\left(A_n+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\right)=A+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}\alpha_{in}=\alpha_i, \quad \text{对 } i=1,2,\cdots. \tag{46}$$

8.7　某些空间中有界集的弱紧性

由上面的结果再应用 8.4 节定理 3，得下面的定理.

对空间 $L^p, p>1$. 每个满足条件

$$\int_0^1 |\alpha_n(t)|^p\, dt < M$$

的函数序列 $\{\alpha_n(t)\}$，其中 $\alpha_n(t)\in L^p$，M 是与 n 无关的数，包含子序列 $\{\alpha_{n_i}(t)\}$，使得对某函数 $\alpha_0(t)\in L^p$，有

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^1 \alpha_{n_i}(t)x(t)dt=\int_0^1 \alpha_0(t)x(t)dt, \quad \text{对每个 } x(t)\in L^{p/(p-1)}\text{①}.$$

事实上，对 $n=1,2,\cdots$，表达式 $\int_0^1 \alpha_n(t)x(t)dt$ 可以考虑为 $L^{p/(p-1)}$ 中的有界线性泛函. 由于它们形成范数有界集且空间 $L^{p/(p-1)}$ 可分，由定理 3 可以从序列 $\{\alpha_{n_p}(t)\}$ 中选取弱收敛子序列；这里只不过用了 8.6 节对空间 L^p 建立的结果.

对空间 M. 每个范数有界的函数序列 $\{\alpha_n(t)\}\subseteq M$ 包含子序列 $\{\alpha_{n_i}(t)\}$，使得对某个函数 $\alpha_0(t)\in M$，有

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^1 \alpha_{n_i}(t)x(t)dt=\int_0^1 \alpha_0(t)x(t)dt, \quad \text{对每个 } x(t)\in L^1.$$

证明类似于上面的定理.

对空间 $l^p, p>1$ 和 m 类似的定理成立.

8.8　定义在有界线性泛函空间中的弱连续线性泛函

设 F 是定义在 Banach 空间 E 上所有有界线性泛函的空间 E^* 中的线性泛函.

① 这个定理属于 M. F. Reisz. 同前. 466-467.

如果 $\lim_{n\to\infty} F(f_n)=F(f)$，则称 F 弱连续，只要 E^* 中的序列 $\{f_n\}$ 和元素 f 使得 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f.

定理8　如果Banach空间 E 是可分的，且 E^* 上的有界线性泛函 F 弱连续，则存在元素 $x_0\in E$，使得

$$F(f)=f(x_0),\quad \text{对每个 } f\in E^*. \tag{47}$$

证明　如果 Γ 表示集合 $\{f\in E^*: F(f)=0\}$，从 F 的弱收敛性得知 Γ 是弱闭线性空间. 显然，可以假设 $\Gamma\neq E^*$ (否则只需取 $x_0=\Theta$). 因此，f_0 是满足方程

$$F(f_0)=1 \tag{48}$$

的有界线性泛函.

由 8.5 节定理 6 得知，存在 $x_0\in E$，使得

$$f_0(x_0)=1 \text{ 和 } f(x_0)=0,\quad \text{对 } f\in\Gamma. \tag{49}$$

现在，由恒等式

$$f=f_0\cdot F(f)+\varphi,\quad \text{对每个 } f\in E^*,\quad \text{其中 } \varphi=f=f_0\cdot F(f) \tag{50}$$

和(48)得 $F(\varphi)=0$，因此 $\varphi\in\Gamma$，故由(49)得 $\varphi(x_0)=0$，再由(50)得到性质(47)，证毕.

附注　如果空间 E 不可分，定理 8 仍成立，只要 F 是有界线性泛函，Γ 是正则闭，在证明中可应用 8.3 节定理 1 以代替 8.5 节定理 6.

第 9 章　弱收敛序列

9.1　定义：元素序列弱收敛性的条件

E 的元素序列 $\{x_n\}$ 称为弱收敛于元素 $x \in E$，如果对每个定义在给定空间 E 上的有界线性泛函 f，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \quad 对每个\ f \in E^*.$$

定理 1　序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 的充分必要条件是：

$$序列\ \{\| x_n \|\}\ 有界 \tag{1}$$

和

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x), \quad 对每个\varphi \in \Delta, \quad 其中\Delta是E^*的稠子集. \tag{2}$$

证明　条件(1)的必要性由定理 6 (5.1 节)得知，条件(2)的必要性是显然的.

为了证明充分性，考虑任意泛函 $f \in E^*$. 由(2)，对每个数 $\varepsilon > 0$，存在泛函 $\varphi \in \Delta$，使得 $\| \varphi - f \| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$，其中 $M = \sup\ (\| x_n \|: n = 1,2,\cdots) \cup \{\| x \|\}$，由(1)它是有限的. 因此

$$| f(x - x_n) | \leqslant | \varphi(x - x_n) | + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \| x - x_n \| \leqslant | \varphi(x - x_n) | + \varepsilon\ ;$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ 以及 ε 的任意性，得知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$，即序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x.

附注　要求集 Δ 的泛函的所有线性组合的集合 Δ 是 E^* 中稠子集就够了.

定理 2　如果序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，则存在序列 $\{x_n\}$ 中项的线性组合序列 $\{g_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = x$.

证明由定理 6 (4.3 节)以及弱收敛的定义得知.

9.2　空间 C, L^r, c 和 l^p 中序列的弱收敛性

这里讨论在某些较重要的特殊空间中序列的弱收敛性.

空间 C. 考虑到空间 C 中有界线性泛函的一般形式(见 4.4 节), 连续函数序列 $\{x_n(t)\}$ 弱收敛于连续函数 $x(t)$ 的充分必要条件是：对每个有界变差函数 $g(t)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)dg(t)=\int_0^1 x(t)dg(t). \tag{3}$$

由此得知，函数序列 $\{x_n(t)\}\subseteq C$ 弱收敛于函数 $x(t)\in C$ 的充分必要条件是：

$$\text{函数序列 }\{x_n(t): n=1,2,\cdots\}\text{ 范数有界} \tag{4}$$

和

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=x(t),\quad \text{对所有} t\in[0,1] \tag{5}$$

都成立.

事实上, (4)的必要性由 9.1 节定理 1 得知, (5)的必要性由下面事实得知, 如果 t_0 表示[0,1]中的任意点，线性泛函 $f(x)=x(t_0)$ 有界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t_0)=x(t_0)$.

充分性由下面事实得知. 对每个有界变差函数 $g(t)$，由条件(4)和(5)得(见引言 A.5)等式(3).

于是由 9.1 节定理 2 建立了下面的定理：

如果连续函数序列 $\{x_n(t)\}, 0\leqslant t\leqslant 1$，范数有界，且处处收敛于连续函数 $x(t)$，则存在序列 $\{x_n(t)\}$ 中项的多项式(线性组合)序列一致收敛于 $x(t)$.

这是连续函数空间值得注意的一个性质，它对第一类 Baire 函数就不成立.

空间 L^p, $p>1$. 序列 $\{x_n(t)\}\subseteq L^p$ 弱收敛于 $x(t)\in L^p$，如果对每个函数 $\alpha(t)\in L^{p/(p-1)}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt.$$

由 8.6 节的(36)下面的附注，有下面的定理：

函数序列 $\{x_n(t)\}\subseteq L^p$ 弱收敛于函数 $x(t)\in L^p$ 的充分必要条件是：

$$\text{序列}\left\{\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt\right\}\text{有界} \tag{6}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)dt=\int_0^u x(t)dt,\quad \text{对 } 0\leqslant u\leqslant 1 \tag{7}$$

都成立[①].

空间 L^1. 序列 $\{x_n(t)\}\subseteq L^1$ 弱收敛于 $x_0\in L^1$，如果对每个(本质)有界函数 $\alpha(t)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt=\int_0^1 x_0(t)\alpha(t)dt\,. \tag{8}$$

作为它的结果，有下面定理：

函数序列 $\{x_n(t)\}\subseteq L^1$ 弱收敛于 $x_0(t)\in L^1$ 的充分必要条件是：

$$\text{序列}\left\{\int_0^1 |x_n(t)|\,dt\right\}\text{有界} \tag{9}$$

和

对每个 $\varepsilon>0$，存在数 $\eta>0$，使得对每个测度 $<\eta$ 的集合 $H\subseteq[0,1]$，有

$$\left|\int_H x_n(t)dt\right|\leqslant\varepsilon,\quad \text{对 } n=1,2,\cdots \tag{10}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)dt=\int_0^u x_0(t)dt,\quad \text{对 } 0\leqslant u\leqslant 1 \tag{11}$$

都满足.

事实上，(8)等价于对 $\alpha(t)\in M$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1[x_n(t)-x_0(t)]\alpha(t)dt=0$. 所述定理容易由此并借助于引言 A.6 的 Lebesgue 定理得到.

空间 c. 序列 $\{x_n\}$，$x_n=\{\xi_i^n\}\in c$，弱收敛于元素 $x=\{\xi_i\}\in c$ 的充分必要条件是：

---

① 这个定理是 M. F. Riesz. 同前. Math. Ann, 1910, 69: 465-468 证明的.

$$\text{序列 } \{\|x_n\|\} \text{ 有界} \tag{12}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^n = \xi_i \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_i^n\right) = \lim_{n\to\infty} \xi_i \tag{13}$$

都满足.

证明立刻可得到，在 c 上给定每个有界线性泛函 f，有形式 $f(x) = C\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i + \sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i\xi_i$，其中 $x = \{\xi_i\}$ 以及 $\|f\| = |C| + \sum\limits_{i=1}^{\infty}|C_i|$(见 4.4 节)，并记住若令

$$f_i(x) = \begin{cases} \lim\limits_{i\to\infty} \xi_i, & \text{对 } i = 0, \\ \xi_i, & \text{对 } i \geqslant 1, \end{cases}$$

则诸 f_i 的线性组合的集合组成 c 上所有有界线性泛函空间的稠子集.

空间 l^p，$p > 1$. 序列 $\{x_n\}$，其中 $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \in l^p$，弱收敛于 $x = \{\xi_i\} \in l^p$ 的充分必要条件是：

$$\text{数列}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\right\}\text{有界} \tag{14}$$

和

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i, \quad \text{对每个 } i = 1,2,\cdots \tag{15}$$

都满足.

证明由 8.6 节的(42)上面的附注得到.

空间 l^1. 序列 $\{x_n\}$，其中 $x_n = \left\{\xi_i^{(n)}\right\} \in l^1$，弱收敛于 $x = \{\xi_i\} \in l^1$ 的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0, \quad \text{即} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| = 0.$$

因此：在空间 l^1，弱收敛等价于范数收敛.

证明　假设 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x. 令 $\eta_i^{(n)} = \xi_i^{(n)} - \xi_i$，于是当 $n \to \infty$ 时序列 $\{y_n\}$ 弱收敛于 Θ，这里 $y_n = \{\eta_i^{(n)}\}$. 因此，对每个有界数列 $\{c_i\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}c_i\eta_i^{(n)}=0. \tag{16}$$

令

$$c_i=\begin{cases}0, & 对\ j=i,\\ 1, & 对\ j\neq i.\end{cases}$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\eta_j^{(n)}=0,\quad 对每个\ j=1,2,\cdots. \tag{17}$$

需证

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i^{(n)}|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=0. \tag{18}$$

假设它不成立，则有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i^{(n)}|>\varepsilon>0. \tag{19}$$

由归纳法，定义两个递增自然数数列 $\{n_k\}$ 和 $\{r_k\}$ 如下：

① n_1 是满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\eta_i^{(n)}|>\varepsilon$ 的最小数,

② r_1 是满足 $\sum\limits_{i=1}^{r}|\eta_i^{(n_1)}|>\frac{\varepsilon}{2}$ 和 $\sum\limits_{i=r+1}^{\infty}|\eta_i^{(n_1)}|>\frac{\varepsilon}{5}$ 的最小 r,

③ n_k 是超过 n_{k-1} 并满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\eta_i^{(n_k)}|>\frac{\varepsilon}{2}$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{r_{k-1}}|\eta_i^{(n_k)}|>\frac{\varepsilon}{5}$ 的最小自然数,

④ r_k 是超过 r_{k-1} 并满足 $\sum\limits_{i=r_{k-1}+1}^{r_k}|\eta_i^{(n_k)}|>\frac{\varepsilon}{2}$ 和 $\sum\limits_{i=r_k+1}^{\infty}|\eta_i^{(n_k)}|>\frac{\varepsilon}{5}$ 的最小自然数,

因此，由(17)和(19)定义的序列 $\{n_k\}$ 和 $\{r_k\}$ 存在.

现在令

$$c_i=\begin{cases}\operatorname{sign}\ \eta_i^{(n_1)}, & 对\ 1\leqslant i\leqslant r_1,\\ \operatorname{sign}\ \eta_i^{(n_{k+1})}, & 对\ r_k\leqslant i\leqslant r_{k+1},\end{cases} \tag{20}$$

于是对每个 $i=1,2,\cdots$，有 $|c_i|=1$，因此由(16)得

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_i\eta_i^{(n_k)}=0. \tag{21}$$

但是，由(20)有

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}c_i\eta_i^{(n_k)}\right|\geqslant\sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k}|\eta_i^{(n_k)}|-\sum_{i=1}^{r_{k-1}}|\eta_i^{(n_k)}|-\sum_{i=r_k+1}^{\infty}|\eta_i^{(n_k)}|,$$

由此，由③和④对每个 $k=1,2,\cdots$，得

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}c_i\eta_i^{(n_k)}\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{5}-\frac{\varepsilon}{5}=\frac{\varepsilon}{10}.$$

与(21)矛盾，因此有(18)，证毕.

9.3　空间 L^p 和 $l^p(p>1)$ 中弱收敛与强(范数)收敛之间的关系

到此，已经考虑过关于空间 L^p 和 l^p $(p>1)$ 中弱收敛和强收敛之间的联系，下面有更一般的定理：

如果序列 $\{x_n(t)\}$，其中 $x_n(t)\in L^p$，$p>1$，弱收敛于 $x(t)\in L^p$，此外还满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|x_n(t)|^p\,dt=\int_0^1|x(t)|^p\,dt,$$

则序列 $\{x_n(t)\}$ 按范数收敛于 $x(t)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|x_n(t)-x(t)|^p\,dt=0^{①}.$$

对 l^p，$p>1$，证明类似的定理，情形 $p=1$ 已经在 9.2 节讨论过了.

如果序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x=\{\xi_i\}\in l^p$，其中 $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}\in l^p,p\geqslant1$，又若

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|,$$

则

① 这个定理由 M. Radon (Sitzungsberichte der Akad. Für Wissensch. In Wien, 1913, 122. Abt. II-a: 1295-1458)第一次证明. 也可参看 F. Riesz. Acta Litt. Ac. Scient. Szeged, 1929, 4: 58-64 和 182-185.

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0. \tag{22}$$

证明 由(15)有

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \tag{23}$$

和

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N-1} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{24}$$

其中 N 为任意自然数. 现在

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i^{(n)} |^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i |^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

因此由假设, 与(23)、(24)一起有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p \leqslant \left[2\left(\sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i |^p\right)^{\frac{1}{p}} \right]^p = 2^p \sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i |^p .$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=N}^{\infty} | \xi_i |^p = 0$, N 为任意自然数, 因此得(22), 证毕.

9.4 弱完备空间

如果 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间 E 中的元素序列, 使得对每个 E 上的有界线性泛函 f 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在, 且不必要存在序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于元素 $x_o \in E$, 即, 使得对每个有界线性泛函 $f \in E^*$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

这种情形在空间 C 有下面例子. 设 $\{x_n(t)\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, 是范数有界函数序列, 它处处收敛于不连续函数 $z(t)$. 于是对每个有界变差函数 $g(t)$ (见引言 A.5)极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t) dg$ 存在, 但序列 $\{x_n(t)\}$ 不弱收敛于任何连续函数.

尽管如此, 有下面定理:

在空间 L^p 和 $l^p, p>1$ 中，对序列 $\{x_n\}$ 和任何有界线性泛函 f，序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于某个元素 x_0 依赖于 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$ 的存在性.

对 L^1 的证明. 如果对每个函数 $\alpha(t)\in M$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt$ 存在，其中 $\{x_n(t)\}\subseteq L^1$，则必须有

$$\lim_{p,q\to\infty}\int_0^1 [x_p(t)-x_q(t)]\alpha(t)dt=0,\quad 对每个\alpha(t)\in M .$$

现在证明，对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$ 和自然数 N，使得对每个 $n\geqslant N$ 和[0,1]的测度小于 η 的子集 H，有

$$\int_H |x_N(t)-x_n(t)|\,dt<\varepsilon . \tag{25}$$

事实上，如果这不成立，则存在两个严格递增的自然数序列 $\{p_k\}$ 和 $\{n_k\}$，以及测度趋于零的子集序列 $\{H_k\}$，使得 $\int_{H_k}\left[x_{p_k}(t)-x_{n_k}(t)\right]dt\geqslant\varepsilon$，因此对每个 $\alpha(t)\in M$，有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^1 [x_{p_k}(t)-x_{n_k}(t)]\alpha(t)dt=0$，但这与引言 A.6 的 Lebesgue 定理矛盾.

因此特别建立了，若 η 充分小，$\int_H |x_n(t)|\,dt<\frac{1}{2}\varepsilon$，对 $n=1,2,\cdots,N$，则由(25)有

$$\int_H |x_n(t)|\,dt<\frac{3}{2}\varepsilon,\quad 对每个 n=1,2,\cdots, \tag{26}$$

只要 H 的测度小于 η.

令

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n(u)\,du=\beta(t). \tag{27}$$

证明函数 $\beta(t)$ 绝对连续.

事实上，对每个 $\varepsilon>0$，由(26)存在 $\eta>0$，使得对 $n=1,2,\cdots$，测度小于 η 的每个集合 H，有 $\int_H |x_n(t)|\,dt<\varepsilon$. 特别，如果 H 是由有限个以 t_i 和 t_i' 为端点的非交迭区间所组成，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_H x_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_i\int_{t_i}^{t_i'}x_n(t)dt=\sum_i[\beta(t_i')-\beta(t_i)],$$

因此，$\left|\sum_i[\beta(t_i')-\beta(t_i)]\right|\leqslant\varepsilon$，这就给出了函数 $\beta(t)$ 的绝对连续性.

因此只要令 $\beta'(t)=x_0(t)$，由(27)和前面 8.6 节建立的弱收敛性条件，得知序列 $\{x_n(t)\}$ 弱收敛于 $x_0(t)$.

对 $L^p, p>1$ 证明. 假设对每个 $y(t)\in L^{p/(p-1)}$，极限 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)y(t)dt$ 存在，其中 $x_n(t)\in L^p, n=1,2,\cdots$.由 4.4 节定理 4，由 $f_n(y)=\int_0^1 x_n(t)y(t)dt$ 给出的 f_n 显然是 $L^{p/(p-1)}$ 上的有界线性泛函，因此由假设，对每个 $y(t)\in L^{p/(p-1)}$，$\lim_{n\to\infty}f_n(y)$ 存在. 由 1.3 节定理 4，$\lim_{n\to\infty}f_n(y)=f(y)$ 也定义了 $L^{p/(p-1)}$ 上的线性泛函 f，因此这个 f 的形式(见 4.4 节)是 $f(y)=\int_0^1 x_0(t)y(t)dt$，对 $y\in L^{p/(p-1)}$，其中 $x_0\in L^p$.

由此得知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)y(t)dt=\int_0^1 x_0(t)y(t)dt,\quad 对每个 y\in L^{p/(p-1)},$$

即 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，证毕.

对 l^1 的证明类似于 9.2 节定理的证明，它由证明序列 $\{x_n\}$ 按范数收敛于元素 x_0 组成.

对 $l^p, p>1$ 的证明类似于对 L^p 的证明.

9.5 关于弱收敛性的一条定理

定理 3 设 U 是 Banach 空间 E 到另一个 Banach 空间 E_1 的有界线性算子. 如果序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 E 中的 x，则序列 $\{U(x_n)\}$ 弱收敛于 E_1 中的 $U(x_0)$.

证明 设 Y 是 E_1 上任何一个有界线性泛函，则由 $X(x)=Y[U(x)]$ 给出的 $X=U^*(Y)$ 是 E 中的有界线性泛函，因为 $|X(x)|=|Y[U(x)]|\leqslant\|Y\|\cdot\|U(x)\|\leqslant\|Y\|\cdot\|U\|\cdot\|x\|$.

由 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 得知

$$\lim_{n\to\infty}Y[U(x_n)]=\lim_{n\to\infty}X(x_n)=X(x_0)=X[U(x_0)],$$

即 $\{U(x_n)\}$ 弱收敛于 $U(x_0)$，证毕.

附注　如果加上假设算子 U 是紧的，则由 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 得到 $\{U(x_n)\}$ 按范数收敛于 $U(x_0)$，即

$$\lim_{n\to\infty} \| U(x_n) - U(x_0) \| = 0.$$

事实上，若不然，则可存在 $\varepsilon > 0$ 和子序列 $\{x_{n_i}\}$，使得

$$\| U(x_{n_i}) - U(x_0) \| > \varepsilon, \quad 对每个\ i = 1,2,\cdots, \tag{28}$$

其中序列 $\{U(x_{n_i})\}$ 按范数收敛于元素 $y' \in E_1$. 现在因 $\{x_{n_i}\}$ 弱收敛于 x_0，由 9.5 节定理 3 得知 $\{U(x_{n_i})\}$ 弱收敛于 $U(x_0)$，于是有 $y' = U(x_0)$，由(28)这是不可能的.

第 10 章 线性泛函方程

10.1 有界线性算子与它们伴随算子之间的关系[①]

这一章将考虑形如 $y=U(x)$ 的方程，其中 U 是有界线性算子，其定义域是 Banach 空间 E，值域是另一个 Banach 空间 E' 的子空间 E_1.

E 上的有界线性泛函，即 E 的对偶空间的元素将以 X 表示，而以 Y 记 E' 的元素.

若有界线性算子 U 定义一个从 E 到 E_1 的双射变换，则逆算子 U^{-1} 显然是线性的(虽然不必连续). 容易看出，逆算子存在的充分必要条件是：

$$由\ U(x)=\Theta\ 导致\ x=\Theta.$$

如果逆算子连续，则存在 $M>0$,使得若 $y=U(x)$，则 $\|x\|\leqslant M\cdot\|y\|$.

反之，如果存在数 $m>0$ 使得 $m\|x\|\leqslant\|U(x)\|$，则 U 有连续逆.

如果逆算子连续，则值域 E_1 是闭的.

事实上，令 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$，其中 $y_n=U(x_n)$，有

$$\lim_{p,q\to\infty}\|x_p-x_q\|\leqslant M\cdot\lim_{p,q\to\infty}\|y_p-y_q\|=0,$$

因此若令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$，则得 $U(x)=y$.

如果泛函 Y_0 是 θ 型序列 $\{Y_\xi\}$ 的超限极限，则共轭泛函 $X_0=U^*(Y_0)$ 是 θ 型序列 $\{x_\xi\}=\{U^*(Y_\xi)\}$ 的超限极限.

事实上，对每个 x，有 $X_\xi(x)=Y_\xi[U(x)]$，其中 $1\leqslant\xi<\theta$.

引理 如果伴随算子 U^* 有连续逆，又 Γ_1 表示对偶空间 E' 的任何正则闭线性子空间，则相应的集合 $\Gamma=U^*(\Gamma_1)$ 也是正则闭的.

证明 由假设，存在数 $M>0$，使得对每个 Y 有 $\|U^*(Y)\|\geqslant M\cdot\|Y\|$. 因此，如果对每个 $1\leqslant\xi<\theta$，有 $X_\xi\in U^*(\Gamma_1)$ 以及 $\|X_\xi\|\leqslant C$，其中 $X_\xi=U^*(Y_\xi)$，则对每个

---

① 这一节的定理在 S. Banach. 同前. Stud. Math. I, 1929: 234-238.

$1 \leqslant \xi < \theta$，也有 $Y_\xi \in \Gamma_1$ 和 $\| Y_\xi \| \leqslant \frac{1}{M}C$．因为由假设集合 Γ_1 是正则闭的，由 8.3 节引理 3，存在序列 $\{Y_\xi\}$ 的超限极限 $Y_0 \in \Gamma_1$．因而泛函 $X_0 = U^*(Y_0)$ 显然属于 $U^*(\Gamma_1)$ 且是序列 $\{X_\xi\}$ 的超限极限．因此集合 $\Gamma = U^*(\Gamma_1)$ 是超限闭，从而由相同引理它是正则闭的，证毕．

定理 1　若伴随算子 U^* 有连续逆，则对每个 y 方程 $y = U(x)$ 有解．

证明　对任何给定非零 $y_0 \in E'$，设 Γ_1 表示所有满足 $Y(y_0) = 0$ 的有界线性泛函 Y 的集合，并令 $\Gamma = U^*(\Gamma_1) = \{X : X = U^*(Y), Y \in \Gamma_1\}$．

集合 Γ_1 是正则闭的．由此，由上面的引理得知集合 Γ 也正则闭．此外，如果 Y_0 是使得 $Y_0(y_0) = 1$ 的有界线性泛函，则泛函 $X_0 = U^*(Y_0)$ 不属于 Γ．因此由 8.3 节定理 1，存在元素 $x_0 \in E$，使得

$$X_0(x_0) = 1 \text{ 和 } X(x_0) = 0, \quad \text{对每个 } X \in \Gamma. \tag{1}$$

令

$$y_1 = U(x_0), \tag{2}$$

有 $Y_0(y_1) = X_0(x_0)$ 和 $Y(y_1) = X(x_0)$，因此由(1)有

$$Y_0(y_1) = 1 \text{ 和 } Y(y_1) = 0, \quad \text{对每个 } Y \in \Gamma_1. \tag{3}$$

现在，对任何有界线性泛函 Y，泛函 $\overline{Y} = Y - [Y(y_0)] \cdot Y_0$ 显然属于 Γ_1，因为 $\overline{Y}(y_0) = Y(y_0) - [Y(y_0)] \cdot Y_0(y_0) = 0$．因此，由(3)有 $\overline{Y}(y_1) = Y(y_1) - [Y(y_0)] \cdot Y_0(y_1) = Y(y_1) - Y(y_0) = 0$，故对每个 Y 有 $Y(y_1 - y_0) = 0$．由此得知 $y_1 - y_0 = 0$，又由(2)得 x_0 满足 $y_0 = U(x_0)$，因此对任意选择的元素 y_0，它是所求的解，证毕．

反之，则有

定理 2　如果方程 $X = U^*(X)$ 对每个 X 有解，则

① 算子 U 有连续逆，

② U 的值域是 y 的集合，它满足条件

$$Y(y) = 0, \quad \text{如果 } U^*(Y) = 0. \tag{4}$$

证明　① 如果算子 U 不允许有连续逆，则存在序列 $\{x_n\} \subseteq E$，使得

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n \| = \infty, \tag{5}$$

且 $\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=0$，其中 $y_n=U(x_n)$.

现在，由于假设对任何 X 方程 $X=U^*(Y)$ 有解，故对每个定义在 E 上的有界线性泛函 X，有 $\lim_{n\to\infty}X(x_n)=\lim_{n\to\infty}Y(y_n)=0$，因此，由 5.1 节定理 6，得知范数序列 $\{\|x_n\|\}$ 有界，这与(5)矛盾.

② 假设对某个元素 $y_0\in E^*$，有

$$U^*(y)=0 \text{ 蕴含 } Y(y_0)=0. \tag{6}$$

由于由上面①算子 U 的值域 E_1 是闭的，如果 y_0 不属于 E_1，则存在(见 4.3 节引理)有界泛函 Y_0，使得对每个 $y\in E_1$，有

$$Y_0(y)=0 \text{ 和 } Y_0(y_0)=1. \tag{7}$$

令 $X_0=U^*(Y_0)$，就有 $X_0(x)=Y_0(y)=0$，其中 $y=U(x)\in E_1$，因此 $U^*(Y_0)=0$. 由此并由(6)得 $Y_0(y_0)=0$，与(7)矛盾. 因此 $y_0\in E_1$.

反之，若 $U^*(Y)=X=0$，对每个 $y\in E_1$ 有等式 $Y(y)=X(x)=0$，证毕.

在 10.1 节定理 1 和定理 2 中用 Y,X,y,x,U^* 和 U 分别代替 x,y,X,Y,U 和 U^*，并应用有关泛函的定理代替论述中有关元素的，得到下面的定理.

定理 3　如果算子 U 允许有连续逆，则方程 $X=U^*(Y)$ 对定义在 E 上的每个有界线性泛函 X 有解.

定理 4　如果方程 $y=U(x)$ 对每个 y 有解，则

① 算子 U 允许有连续逆，

② 它的值域是对每个 $x\in E$ 满足条件

$$X(x)=0, \quad \text{如果 } U(x)=0 \tag{8}$$

的 X 的集合.

由 10.1 节定理 1~4 容易得到下面的定理.

定理 5　如果方程 $y=U(x)$ 对每个 y 恰有一个解，则方程 $X=U^*(Y)$ 对每个 X 也允许恰有一个解，反之亦然.

定理 6　如果算子 U 和 U^* 允许有连续逆，则对每个 y 和每个 X 恰好存在一个 x 和一个 Y，使得 $y=U(x)$ 和 $X=U^*(Y)$.

定理 7　如果方程 $y=U(x)$ 和 $X=U^*(Y)$ 对每个 y 和每个 X 有解，则这些解是唯一的.

此外，将证明下面三条定理：

定理 8　如果有界线性算子 U 的值域是闭的, 则伴随算子 U^* 的值域是满足条件(8)的 X 的集合.

证明　算子 U 的值域 $E_1 \subseteq E'$ 的导集 E_1' 是线性闭子空间, 它本身是 Banach 空间.

现在, 如果 Z 表示 E_1' 上任意有界线性泛函, $U_1^*(Z)$ 表示满足方程

$$Z[U(x)] = X(x), \quad 对每个x \in E$$

的有界线性泛函 X, 容易验证算子 U_1^* 和 U^* 的值域是相同的. 事实上, 对每个定义在 E' 上且满足条件

$$Z(y) = Y(y), \quad 对每个\ y \in E_1' \tag{9}$$

的有界线性泛函 Y, 对每个 $x \in E$,有 $Z[U(x)] = Y[U(x)]$. 因此

$$U_1^*(Z) = U^*(Y), \tag{10}$$

又由 Z 的定义和 4.2 节定理 2, 在 E' 上存在有界线性泛函 Y 满足条件(9), 因此满足(10). 因此由上面定理 4 的②用 E_1 代替 E' 得到条件(8).

定理 9　如果有界线性算子 U^* 的值域是闭的, 则算子 U 的值域是满足条件(4): 如果 $U^*(Y) = 0$, 则 $Y(y) = 0$ 的所有 y 的集合.

证明　泛函 Z 和 $U_1^*(Z)$ 的定义如同 10.1 节定理 8 的证明中所作的, 注意到对每个 $y \in E_1'$, 由 $U_1^*(Z) = \Theta$ 得 $Z(y) = 0$: 因此 $Z = \Theta$.

现在作为 Z 的集合和 X 的集合都是 Banach 空间, 由 3.3 节定理 5, 算子 U_1^* 允许有连续逆, 其中 $X = U_1^*(Z)$. 故由定理 1, 方程 $y = U(x)$ 对每个 $y \in E_1'$ 有解. 因此算子 U 的值域 $E_1 = E_1'$ 是闭的.

由于当 $y \in E'$ 时条件(4)显然满足, 余下的只需建立它的逆, 即证明满足(4)的每个 $y_0 \in E'$ 属于 E_1 .

事实上, 由于 E_1 是闭线性子空间, 如果上面结论不成立(见 4.3 节引理), 则存在有界线性泛函 Y_0 , 使得对每个 $y \in E_1$ 有 $Y_0(y_0) = 1$ 和 $Y_0(y) = 0$. 因此若令 $X_0 = U^*(Y_0)$, 对 $x \in E$ 有 $X_0(x) = Y_0(y) = 0$, 故 $X_0 = 0$, 从而 $U^*(Y_0) = 0$, 与假设 y_0 满足条件(4)矛盾.

定理 10　如果有界线性算子 U 的值域 E_1 是闭的, 则存在数 $m > 0$, 使得对每个 $y > E_1$ 可以找到对应的 $x \in E$, 满足条件

$$y = U(x) \ 和\ \|x\| \leqslant m\|y\|.$$

证明　在3.3节定理3证明过程中，建立了命题(1)，即在定理的假设下证明下面事实：对任意$\varepsilon>0$，存在$\eta>0$，使得对任意给定的满足不等式$\|y\|<\eta$的y，可找到对应的x满足条件$y=U(x)$和$\|x\|<\varepsilon$.

容易由此推出，对每个y，存在满足定理要求的x，其中$m=\dfrac{\varepsilon}{\eta}$.

10.2　紧线性算子线性方程的 Riesz 理论

考虑形如$y=x-U(x)$的方程，其中U是从x的空间E到它自身的紧线性算子[①].

引理　若线性算子U是紧的，则由$T(x)=x-U(x)$给出的算子T将每个有界闭集$G\subseteq E$映为闭集.

证明　令

$$x_n\in G,\quad 对\ n=1,2,\cdots\ 和\ \lim_{n\to\infty}T(x_n)=y_0, \tag{11}$$

所以序列$\{U(x_n)\}$构成相对紧集，故存在收敛于某个元素$x_0\in E$的子序列$\{U(x_{n_i})\}$. 由于$x_{n_i}=U(x_{n_i})+T(x_{n_i})$，由(11)有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_i}=x_0+y_0$，因此$T(y_0+x_0)=y_0$.

定理 11　如果U是紧算子，则由

$$T(x)=x-U(x)\ \ 和\ T^*(x)=X-U^*(x)$$

给出的算子T和T^*的值域都是闭的.

证明　用G表示方程$T(x)=0$的解的集合，设$y_0\neq\Theta$是T值域的聚点，则存在序列$\{x_n\}\subseteq E$使得$y_0=\lim\limits_{n\to\infty}T(x_n)$.

如果序列$\{\|x_n\|\}$有界，则由刚才证明的引理知，元素y_0属于值域.

令d_n表示x_n和集合G之间的距离，则存在$w_n\in G$，使得

$$d_n\leqslant\|x_n-w_n\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)d_n, \tag{12}$$

有

$$\lim_{n\to\infty}T(x_n-w_n)=y_0. \tag{13}$$

---

① 这一节的定理除了指出的相应算子概念都是由 F. Riesz (Uber lineare Funktionalgleichungen. Acta Math, 1918,41: 71-98) 第一次建立的.

如果序列$\{\| x_n - w_n \|\}$有界，由上面的引理这个证明是显然的.

假设$\lim\limits_{n\to\infty}\| x_n - w_n \| = \infty$，令$z_n = \dfrac{x_n - w_n}{\| x_n - w_n \|}$，由(13)有$\lim\limits_{n\to\infty} T(z_n) = \Theta$和$\| z_n \| = 1$. 由引理可以从序列$\{z_n\}$选取收敛于元素$w_0$的子序列$\{z_{n_i}\}$，使得$T(w_0) = 0$，因此$w_0 \in G$. 令$z_n - w_0 = \varepsilon_n$,有

$$\lim_{i\to\infty} \| \varepsilon_{n_i} \| = 0, \tag{14}$$

故$z_n - w_0 = \dfrac{x_n - w_n}{\| x_n - w_n \|} - w_0 = \varepsilon_n$，从而$x_n - w_n - w_0 \cdot \| x_n - w_n \| = \varepsilon_n \cdot \| x_n - w_n \|$，因此由(12)有

$$\left\| x_{n_i} - w_{n_i} - w_0 \cdot \| x_{n_i} - w_{n_i} \| \right\| \leqslant \| \varepsilon_{n_i} \| \left(1 + \frac{1}{n_i}\right) d_{n_i}. \tag{15}$$

现在由(14)和(15)，存在n_i，使得

$$\left\| x_{n_i} - w_{n_i} - w_0 \| x_{n_i} - w_{n_i} \| \right\| \leqslant \frac{d_{n_i}}{2},$$

但这是不可能的，因为$w_{n_i} + w_0 \| x_{n_i} - w_{n_i} \| \in G$，而$d_{n_i}$是$x_{n_i}$和$G$之间的距离.

因此T的值域是闭的. 关于T^*的论述类似.

定理 12　如果U是紧线性算子，则方程

$$x - U(x) = \Theta \text{ 和 } X - U^*(X) = \Theta$$

至多有有限个线性无关解.

证明　假设定理结论不成立，则存在E元素的线性无关无穷序列$\{x_n\}$，对$n = 1,2,\cdots$，满足方程$x_n - U(x_n) = 0$. 设E_n是集合$\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i x_i: h_i \text{ 是任意实数}\right\}$. 显然,

$$\text{由 } x \in E_n \text{ 得 } x - U(x) = \Theta, \tag{16}$$

容易看出，对每个$n = 1,2,\cdots$，集合E_n是不包含x_{n+1}的闭线性子空间，因此是E_{n+1}的真子集.

由 5.3 节的引理，存在序列$\{y_n\}$，使得

$$y_n \in E_n, \quad \| y_n \| = 1, \quad 和 \ \| y_n - x \| > \frac{1}{2}, \quad 对每个 x \in E_{n-1}. \tag{17}$$

因此由(16), 得 $y_n - U(y_n) = \Theta$, 从而 $y_n = U(y_n)$. 因而序列 $\{y_n\}$ 是相对紧集, 但这与(17)矛盾.

对方程 $X - U^*(X) = \Theta$ 理由类似, 这时应用 E 上所有有界线性泛函的对偶空间, 它自身是 Banach 空间.

定理 13　如果对紧线性算子 U, 与每个 y 或者相应的 Y, 方程 $y = x - U(x)$ 和 $Y = X - U^*(X)$ 分别有解, 则方程 $x - U(x) = \Theta$, 相应的 $X - U^*(X) = \Theta$ 恰有一个解, 即 $x = \Theta$ 或者相应的 $X = \Theta$.

证明　令

$$T^{(1)}(x) = x - U(x) = T(x) \ 和 \ T^{(n)}(x) = T[T^{(n-1)}(x)].$$

设 E_n 表示所有满足方程 $T^{(n)}(x) = \Theta$ 的 $x \in E$ 的集合, 并假设存在 $x_1 \neq \Theta$ 使得 $T(x_1) = \Theta$. 令 x_n 表示满足方程 $x_{n-1} = T(x_n)$ 的元素, 于是有

$$T^{(n)}(x_{n+1}) = x_1 \neq \Theta \ 和 \ T^{(n+1)}(x_{n+1}) = T(x_1) = \Theta,$$

因此

$$x_{n+1} \in E_{n+1} \setminus E_n.$$

集合 E_n 显然是闭线性子空间, 且是 E_{n+1} 的真子集. 因此由引理, 存在满足条件(17)的序列 $\{y_n\}$.

现在, 由于 $y_n \in E_n$, 由 T 和 E_n 的定义有等式 $T(y_n) = y_n - U(y_n)$, 由此

$$U(y_p) - U(y_q) = y_p - [y_q + T(y_p) - T(y_q)] = y_p - x, \tag{18}$$

其中 $p > q$, 故得 $T^{(p-1)}(x) = T^{(p-1)}(y_q) + T^{(p)}(y_p) - T^{(p)}(y_q) = \Theta$.

因此 $x \in E_{p-1}$, 从而由(17)有 $\| y_p - x | > \frac{1}{2}$, 故由(18), 对 $p > q$ 有 $\| U(y_p) - U(y_q) \| > \frac{1}{2}$, 这是不可能的, 因为序列 $\{U(y_n)\}$ 有收敛子序列. 因此必须是 $x = \Theta$, 证毕.

对于方程 $X - U^*(x) = \Theta$, 证明类似, 只需对 E 的对偶空间证明即可.

定理 14　如果对紧线性算子 U 方程 $x - U(x) = \Theta$, 方程 $X - U^*(X) = \Theta$ 有唯一解 $x = \Theta$, 相应地, $X = \Theta$, 则方程 $y = x - U(x)$, 或 $Y = X - U^*(X)$ 对每个 y 或

每个 X 有解.

证明　由于定理 11 算子 $I-U$ 的值域是闭的，其中 I 是 E 上的恒等算子，即对每个 $x\in E$ 有 $I(x)=x$．由定理 3 的假设得知，每个 Y 方程 $Y=X-U^*(X)$ 有解. 因此由 10.2 节定理 13，方程 $X-U^*(X)=\Theta$ 仅有的解是 $X=\Theta$．从而由定理 5，方程 $y=x-U(x)$ 对每个 y 可解.

对方程 $Y=X-U^*(X)$ 的证明类似.

定理 15　如果 U 是紧线性算子，则方程

$$x-U(x)=\Theta \quad \text{和} \quad X-U^*(X)=\Theta$$

有相同个数的线性无关解[①].

证明　如前，令

$$T(x)=xU(x) \quad \text{和} \quad T^*(X)=X-U^*(X). \tag{19}$$

设

$$T(x_i)=\Theta, \quad \text{对}\ i=1,2,\cdots,n \ \text{和}\ T^*(X)=X-U^*(X), \quad \text{对}\ i=1,2,\cdots\nu. \tag{20}$$

其中序列 $\{x_i\}$ 的项以及相应 $\{X_i\}$ 的项假设是线性无关，数 n 和 ν 分别表示方程 $T(x)=\Theta$ 和 $T^*(X)=\Theta$ 的线性无关解的最大可能个数.

对 $i=1,2,\cdots,\nu$ 用 z_i 表示满足

$$X_j(z_i)=\begin{cases}1, & \text{对}\ i=j,\\ 0, & \text{对}\ i\neq j\end{cases} \tag{21}$$

的任何元素.

这样的 z_i 存在，因为形如

$$\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j X_j+\sum_{j=i+1}^{\nu}\beta_j X_j$$

泛函的线性子空间是弱闭且不包含 X_i.

类似地，对 $i=1,2,\cdots,n$，设 Z_i 表示有界线性泛函，使得

① 这个定理的某些特殊情形是 F. Riesz . l.c. Actaq Math, 1918,41: 86-98. 这个定理的更一般形式但不同的叙述是由 M. T. H. Hildebrandt (Über volistetige lineare Transformationen. Acta Math, 1928: 311-318)给出的. 这里的说明是 M.J.Schauder 提供的. 同前. Studia Mathematica II, 1930: 183-196.

$$Z_j(x_i)=\begin{cases}1, & 对\ i=j,\\ 0, & 对\ i\neq j.\end{cases} \tag{22}$$

这样的泛函 Z_i 存在，因为 x_i 不属于形如

$$\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j x_j+\sum_{j=i+1}^{n}\beta_j x_j$$

的元素的闭线性子空间.

这就是说，先假设 $\nu>n$. 令

$$R(x)=U(x)+\sum_{i=1}^{n}Z_i(x)\cdot z_i \quad 和 \quad W(x)=x-R(x). \tag{23}$$

容易看出如此定义的算子 R 是紧的. 下面证明方程 $W(x)=\Theta$ 恰有一个解，即 $x=\Theta$.

事实上，假设 $W(x_0)=\Theta$ ，只需证明 $x_0=\Theta$. 现在，由(19)和(23)有

$$W(x_0)=x_0-R(x_0)=T(x_0)-\sum_{i=1}^{n}Z_i(x_0)\cdot z_i=0, \tag{24}$$

由(20)得

$$X_iT(x)=\Theta, \quad 对每个 x 和\ i=1,2,\cdots,\nu, \tag{25}$$

再由(21)和(24)得

$$X_iW(x_0)=Z_i(x_0)=0, \quad 对\ i=1,2,\cdots,n, \tag{26}$$

因此，由(20)得 $T(x_0)=\Theta$. 由 n 的定义 $x_0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ ， α_i 为适当的实数，由(26)和(22)，对所有的 $i=1,2,\cdots,n$ ，有 $Z_i(x_0)=\alpha_i=0$ ，最后有 $x_0=\Theta$.

由此和定理 14 得知方程 $x-R(x)=T(x)-\sum_{i=1}^{n}Z_i(x)\cdot z_i=z_{n+1}$ 有解. 但是由(21)和(25)立刻看到 $X_{n+1}[x-R(x)]=0$ ，此外由(21)有 $X_{n+1}(z_{n+1})=1$. 因此，假设 $\nu>n$ 是不可能的.

现在假设 $\nu<n$. 设 $R(x)=\sum_{i=1}^{\nu}Z_i(x)\cdot z_i$ ，因此 $R^*(X)=\sum_{i=1}^{\nu}X(z_i)\cdot Z_i$. 如上可证

明方程 $T^*(X)-\sum_{i=1}^{\nu}X(z_i)\cdot Z_i=\Theta$ (方程 $T(X)-\sum_{i=1}^{\nu}Z_i(x)\cdot z_i=\Theta$ 的伴随)允许恰有一个解，即 $X=\Theta$. 由定理 14, 方程 $T^*(X)-\sum_{i=1}^{\nu}X(z_i)\cdot Z_i=Z_{\nu+1}$ 有解, 但这是不可能的，因为对每个 X 有 $T^*(X)\cdot x_{\nu+1}=X[T(x_{\nu+1})]=0$，因此，由(22)对 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $Z_i(x_{\nu+1})=0$，此外 $Z_{\nu+1}(x_{\nu+1})=1$. 从而假设 $\nu<n$ 也导致矛盾.

10.3　线性方程的正则值和本征值

现在假设 U 仍是有界线性算子, 它将 E 映为它自身.

如果 I 是 E 上的恒等算子, 则对每个实数 h，$I-hU$ 是有界线性算子, 它的共轭是 $I-hU^*$, 其中 U^* 是 U 的共轭.

考虑到这点,研究方程

$$x-hU(x)=y \text{ 和 } X-hU^*(X)=Y. \tag{27}$$

如果对给定的 h_0, (27)中的第一个或第二个方程对每个 y 或每个 Y 恰有一个解, 则相应的 h_0 称为这个方程的正则值, 否则 h_0 称为本征值. 所有本征值的集合称为谱.

如果 x 或 X 分别满足下面第一个或第二个方程

$$x+hU(x)=\Theta \text{ 和 } X+hU(X)=\Theta, \tag{28}$$

则它们分别是正则元素(向量)或正则泛函.

由 10.1 节定理 5, (27)的两个方程有相同的正则值集合, 因此有相同的本征值集合.

10.1 节建立的定理 1~9 容易应用到(27)形式的方程.可以用这些定理从两个方程的一个的性质推导另一个方程的性质, 反之亦然.

定理 16　正则值的集合是开的.

证明　如果 h_0 是正则值, 则存在满足条件

$$\|x-h_0U(x)\|\geqslant m\cdot\|x\| \text{ 和 } \|X-h_0U^*(X)\|\geqslant m\|X\|$$

的数 $m>0$. 因此对每个 ε,有

$$\|x-(h_0+\varepsilon)U(x)\|\geqslant\|x-h_0U(x)\|-|\varepsilon|\cdot\|U(x)\|\geqslant(m-|\varepsilon|\cdot\|U\|)\|x\|,$$

类似地有

$$\|X-(h_0+\varepsilon)U^*(x)\| \geqslant (m-|\varepsilon|\cdot\|U^*\|)\|X\|.$$

由此得知，对充分小$|\varepsilon|$，算子

$$I-(h_0+\varepsilon)U \text{ 和 } I-(h_0+\varepsilon)U^*$$

有有界逆，由此和 10.1 节定理 6 得知$h_0+\varepsilon$也是正则值.

定理 17 如果$|h|<1/\|U\|$，则h是正则值①.

证明 如果$|h|<1/\|U\|$，则解可以写为形式

$$x=y+\sum_{n=1}^{\infty}h^nU^{(n)}(y) \text{ 和 } X=Y+\sum_{n=1}^{\infty}h^nU^{*(n)}(Y), \tag{29}$$

其中

$$U^{(1)}=U \text{ 和 } U^{*(1)}=U^*,$$
$$U^{(n)}=U[U^{(n-1)}] \text{ 和 } U^{*(n)}=U^*[U^{*(n-1)}].$$

级数(29)收敛，因为有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|h^nU^{(n)}(y)\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}[|h|\cdot\|U\|]^n\cdot\|y\|$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|h^nU^{*(n)}(Y)\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left[|h|\cdot\|U^*\|\right]^n\cdot\|Y\|.$$

由(29)得到

$$U(x)=U(y)+\sum_{n=1}^{\infty}h^nU^{(n+1)}(y)=\frac{1}{h}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}h^nU^{(n)}(y)=\frac{1}{h}\cdot(x-y),$$

因此$x-hU(x)=y$. 类似地,有$X-hU^*(X)=Y$. 从而对每个y和每个Y，(27)中的两个方程分别有解. 由定理 7，这两个解是唯一的，因此h是正则值，证毕.

定理 18 如果$h\neq h'$以及

$$x-hU(x)=\Theta \text{ 和 } Y-h'U^*(X)=\Theta,$$

---

① 参看 S. Banach. 同前. Fund. Math. III, 1923: 161，定理 7.

则 $X(x)=0$.

换句话说, 值 h 的任何一个本征向量与不等于 h 的值 h' 的每个本征泛函正交.

证明 有 $X(x)=hX[U(x)]=hU^*(X)x$, 以及由于 $U^*(X)=\frac{1}{h'}X$, 得知 $X(x)=\frac{h}{h'}X(x)$. 如果 $h\neq h'$, 则有 $X(x)=0$.

10.4 紧算子理论中的 Fredholm 定理

如果在上一节的假设下, 再假设算子是紧的, 则对方程(28)可以叙述由 Fredholm 积分方程定理的推广所组成的下面定理[1].

定理 19 (28)中两个方程有相同有限个数 $d(h)$ 的线性无关解.

这不过是 10.2 节定理 15 的重叙.

定理 20 如果 $d(h)=0$, 则 h 是正则值.

这是 10.2 节定理 14 和定理 19 的推论.

定理 21 如果 $d(h)>0$, 又若 $\{x_i\}$ 和 $\{X_i\}$, $i=1,2,\cdots,d(h)$, 分别表示(28)中方程的(线性无关)解, 则对每个满足 $X_i(y)=0$ 的 y 以及相应对每个满足 $Y_i(x_i)=0$ 的 Y, 方程(27)允许有解.

这分别是 10.1 节定理 8 和定理 9 以及 10.2 节相应定理 11 的推论.

现在证明

定理 22 如果 U 是紧线性算子, 则(27)的第一个方程

$$y=x-hU(x)$$

的本征值组成孤立(离散)集[2].

证明 设 $\{h_n\}$ 是本征值的无穷序列, 其中 $h_i=h_j$, 对 $i\neq j$. 令

$$x_n=h_nU(x_n) \text{ 和 } x_n\neq\Theta. \tag{30}$$

首先证明向量 x_n 线性无关.

事实上, 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 线性无关, 而 $x_n=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i$, 则有 $x_n=h_nU(x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}h_n\alpha_iU(x_i)$, 因此, $x_n=\sum_{i=1}^{n-1}h_n\frac{\alpha_i}{h_i}x_i$, 从而 $\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\left(1-\frac{h_n}{h_i}\right)x_i=0$. 因为由假设 $\frac{h_n}{h_i}\neq 1$, 对 $n>i$, 显然向量 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 不可能线性无关.

① 参看 J. Schauder. 同前. Studia Mathematica II, 1930: 183-196.

② 参看 F. Riesz. 同前. Acta Math., 1918, 41: 90. Satz 12.

这建立了，对每个 $n=1,2,\cdots$，设 E_n 是形如 $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ 的元素 y 的线性子空间，它是闭的且组成 E_{n+1} 的真子集. 对每个 $y\in E_n$，由(30)有

$$y-h_nU(y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i-\sum_{i=1}^{n}h_n\alpha_i\frac{x_i}{h_i}=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\left(1-\frac{h_n}{h_i}\right)x_i,$$

因此 $y-h_nU(y)\in E_{n-1}$. 由 10.4 节引理，存在满足条件(17)的元素序列 $\{y_n\}$.

现在假设序列 $\{h_n\}$ 收敛，由于算子 U 是紧的，序列 $\{U(h_ny_n)\}$ 组成相对紧集.

此外，对 $p>q$，有

$$\|U(h_py_p)-U(h_qy_q)\|=\|y_p-[y_p-h_pU(h_p)+U(h_qy_q)]\|, \tag{31}$$

由(17)已经看到的，$y_p-h_pU(y_p)\in E_{p-1}$；类似地有 $h_qU(y_q)\in E_q\subseteq E_{q-1}$，因此由(17)和(31)，对每个 $p>q$ 有 $\|U(h_py_p)-U(h_qy_q)\|>\frac{1}{2}$，由此得知集合 $\{U(h_ny_n):n=1,2,\cdots\}$ 不可能是相对紧的.

由此矛盾得知，不存在不同本征值的序列 $\{h_n\}$ 可以收敛. 因此它们组成离散集.

10.5 Fredholm 积分方程

现在讨论刚才证明的定理的几个应用.

在 L^p 空间，形如 $x-hU(x)=y$ 的方程称为 Fredholm 积分方程，它有下面的一般形式

$$x(s)-h\int_0^1 K(s,t)x(t)dt=y(s), \tag{32}$$

其中函数 $K(s,t)$ 满足某些条件.

伴随方程取形式

$$X(t)-h\int_0^1 K(s,t)X(s)ds=Y(t). \tag{33}$$

容易看出如何用前面的定理去解释这些积分方程的内容.

如果 $K(s,t)$ 满足适当的条件，例如将 $x(t)$ 映为函数 $\int_0^1 K(s,t)x(t)dt$ 的算子是紧的. 从而 10.2 节、10.3 节和 10.4 节的定理可应用到方程(32)和(33). 特别，10.4 节定

理 19~21 变成 Fredholm 论述的定理. 当然, 尽管它们在积分方程之外的领域也成立.

10.6　Volterra 积分方程

形如

$$x(s)-\int_0^s K(s,t)x(t)dt=y(s) \tag{34}$$

的方程称为 Volterra 方程, 其中 $K(s,t)$ 是连续函数.

于是作为空间 C 和空间 L^p ($P>1$) 中的算子 $\int_0^s K(s,t)x(t)dt$ 是紧的.

现在证明方程

$$x(s)-\int_0^s K(s,t)x(t)dt=0 \tag{35}$$

允许有唯一解 $x(s)=0$.

事实上, 假设 $x(s)$ 满足这个方程, 显然 $x(s)$ 是连续函数. 令

$$m=\max_{0\leqslant s\leqslant 1}|x(s)| \quad 和 \quad M=\max_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1}}|X(s,t)|.$$

于是由(35)有

$$|x(s)|\leqslant M\cdot\int_0^s|x(t)|dt, \tag{36}$$

由此对 $0\leqslant s\leqslant 1$ 有 $|x(s)|\leqslant M\cdot m\cdot s$. 用 $M\cdot m\cdot s$ 代替(36)中的 $x(t)$, 得不等式 $|x(s)|\leqslant M^2\cdot m\cdot s^2/2$. 积分得 $|x(s)|\leqslant\dfrac{(M\cdot s)^n}{n!}\cdot m$, 对 $n=1,2,\cdots$. 因此显然有 $x(s)=0$.

回到方程(34). 由于对 $x,y\in C$, 以及类似地对 $x,y\in L^p$, 算子 $\int_0^s K(s,t)x(t)dt$ 是紧的, 由 10.2 节定理 14, 方程(34)对 $y\in C$ 或 $y\in L^p$ 恰好具有一个解 $x\in C$ 或 $x\in L^p$.

10.7　对称积分方程

如果 U 是映 L^2 到它自身的有界线性算子, 它的伴随 U^* 也可认为是这样的算

子. 这是因为 L^2 的对偶空间也可视为 L^2 空间(见 4.4 节).

算子 U 称为对称的, 如果

$$\int_0^1 yU(x)dt = \int_0^1 xU(y)dt, \quad 对\ x,y \in L^2, \tag{37}$$

由于 $\int_0^1 yU(x)dt = \int_0^1 xU^*(y)dt$, 每个对称算子与它自己的伴随算子重合.

当函数 $K(s,t)$ 对所有 (s,t) 对称(即 $K(s,t)=K(t,s)$), 且二重积分

$$\int_0^1\int_0^1 K(s,t)x(t)y(s)dsdt$$

对所有 $x,y \in L^2$ 存在, 则由

$$\begin{cases} U(x) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt = y(s), \\ V(x) = x(s) - h\int_0^1 K(s,t)x(t)dt = y(s) \end{cases} \tag{38}$$

给出的 U 和 V 是有界线性算子, 它们都是对称的, 因为它们满足条件(37).

形如(38)的方程就是熟知的对称积分方程.

定理 23 如果 U 是对称算子, 数 h 是算子 $I-hU$ 的正则值, 则它的算子允许有连续的逆, 或者对每个 y 方程 $x-hU(x)=y$ 可解.

证明由 10.1 节定理 3 和定理 4 得知, 因为按照这些情况, 有关方程与它的伴随是相同的.

第 11 章　等距, 等价, 同构

11.1　等　　距

设 E 和 E_1 是距离空间(见引言 B.7), U 是映 E 到 E_1 的双射. 这个映射称为等距的或者等距, 如果它不改变距离. 即对 E 的每对元素 x_1, x_2, 有

$$d(x_1,x_2)=d(U(x_1),U(x_2)).$$

由于赋范向量空间是距离空间(见第 4 章 4.1), 考虑它们之间的等距变换是有意义的.

11.2　空间 L^2 和 l^2

定理 1　空间 L^2 和 l^2 是等距的.

证明　设 $\{x_i(t)\}, 0\leqslant t\leqslant 1$ 是 L^2 中任何完全正交函数序列. 若 $x\in L^2$, 则有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_0^1 x_i(t)x(t)dt\right]^2=\int_0^1\big(x(t)\big)^2 dt. \tag{1}$$

如果 $U(x)$ 表示序列 $y=\{\eta_i\}$, 其中 $\eta_i=\int_0^1 x_i(t)x(t)dt$, 则由(1)有 $y\in l^2$ 和 $\|U(x)\|=\|x\|$. 由于 U 是加性的且不改变元素的范数, 故它是有界线性算子. 此外, 由正交级数理论得知, 对每个 $y\in l^2$, 存在一个且仅有一个函数 $x(t)\in l^2$, 使得 $y=U(x)$.

于是有界线性算子 U 双射映 L^2 到 l^2 而不改变范数, 因此也不改变距离. 从而空间 L^2 和 l^2 是等距的.

附注　后面将看到空间 L^p 和 L^q 仅在情形 $p=1$ 或 $p=2$ 时是等距的. 这是 12.3 节推论的一个结果.

11.3　赋范向量空间中的等距变换

定理 2　从一个赋范向量空间到另一个赋范向量空间的每个满足 $U(\Theta)=\Theta$ 的

等距变换 U 都是有界线性算子[1].

证明 首先设 E 是任一距离空间，x_1, x_2 是 E 的任何一对点.

设 E_1 表示满足

$$d(x,x_1)=d(x,x_2)=\frac{1}{2}d(x_1,x_2) \tag{2}$$

的点 $x \in E$ 的集合. 对 $n=2,3,\cdots$，令 H_n 为对每个 $z \in H_{n-1}$，满足

$$d(x,z) \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1}) \tag{3}$$

的点 $x \in H_{n-1}$ 的集合，其中 $\delta(H_{n-1})=\sup\{d(x,y): x,y \in H_{n-1}\}$ 是集合 H_{n-1} 的直径.

对如此定义的序列 $\{H_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\delta(H_n)=0. \tag{4}$$

事实上，如果集合 H_n 非空，则对 H_n 的每对点 x',x''，有 $x'' \in H_{n-1}$. 而由定义，$H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots \supseteq H_n \supseteq \cdots$，故由(3)得 $d(x',x'') \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$. 因此 $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2}(H_{n-1})$，从而 $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\delta(H_{n-1})$. 此外由(2)对 H_1 的每对点 x',x'' 有不等式 $d(x',x'') \leqslant d(x',x_1)+d(x'',x_1)=d(x_1,x_2)$，故 $\delta(H_1) \leqslant d(x_1,x_2)$，从而 $\delta(H_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ $d(x_1,x_2)$，因此得(4).

由此得知，如果集合 H_n 的交非空，那它将为单个点.称该点为 x_1,x_2 的中心.

考虑到这点，设 E 是赋范向量空间，则

$$d(x',x'')=\|x'-x''\|, \quad 对所有\ x',x'' \in E.$$

令 $\overline{x}=x_1+x_2-x$，对 $x \in E$. 由归纳法容易看出

$$由\ x \in H_n\ 得\ \overline{x} \in H_n, \quad 对每个\ n=1,2,\cdots. \tag{5}$$

事实上，如果 $x \in H_1$，则有 $\|\overline{x}-x_1\|=\|x-x_2\|$ 和 $\|\overline{x}-x_2\|=\|x-x_1\|$，因此，$\|\overline{x}-x_1\|=\|\overline{x}-x_2\|=\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|$. 因而由(2)，$\overline{x} \in H_1$，假设(5)对 $n-1$ 成立，于是对 $x' \in H_{n-1}$ 有 $x_1+x_2-x' \in H_{n-1}$. 如果 $x \in H_n$，由(3)有 $\|\overline{x}-x'\|=\|(x_1+x_2-x')-$

---

① 这个定理是由 S.Mazur 和 S.Ulam (见 Comptes Readus de l'Acad. Des Sc. Pris, 1932, 194: 946-948)建立的.

$x\|\leqslant\frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$, 因此 $\overline{x}\in H_n$.

下面证明点 $\xi=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ 是 x_1,x_2 的中心. 事实上,有 $\xi\in H_1$, 因为 $\|x_1-\xi\|=\|x_2-\xi\|=\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|$.因此可假设 $\xi\in H_{n-1}$.对每个 $x\in H_{n-1}$, 由(5)有 $x_1+x_2-x=\overline{x}\in H_{n-1}$, 而由于 $2\|\xi-x\|=\|x_1+x_2-2x\|=\|x-\xi\|\leqslant\delta(H_{n-1})$, 得到 $\|\xi-x\|\leqslant\frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$, 因此 $\xi\in H_n$. 由于对每个自然数 n, 它属于 H_n, 因此点 ξ 是 x_1,x_2 的中心.

这就建立了, 若 E_1 是另一个赋范向量空间, U 是 E 到满足 $U(\Theta)=\Theta$ 的整个 E_1 的等距算子. 由于中心概念是距离空间的概念, 容易看出 E 的任一对点 x_1,x_2 的中心映为 E_1 的一对点 $U(x_1),U(x_2)$ 的中心. 于是有

$$U\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]=\frac{1}{2}[U(x_1)+U(x_2)],\quad 对\ x_1,x_2\in E,$$

因此若令 $x_1=x$ 和 $x_2=\Theta$, 并由假设 $U(\Theta)=\Theta$, 得到

$$U\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}U(x),\quad 对每个 x\in E.$$

由此得知, 对 E 的任何点 x_1 和 x_2, 有

$$U(x_1+x_2)=U\left[\frac{1}{2}(2x_1+2x_2)\right]=\frac{1}{2}U(2x_1)+\frac{1}{2}U(2x_2)=U(x_1)+U(x_2).$$

所以 U 是加性算子, 又因为它连续, 故它也是有界线性算子.

11.4　连续实值函数空间

对任何紧距离空间 Q (见引言 B.7), 定义在 Q 上的连续实值函数 $x(q)$ 的集合 E, 当加法和数量乘法按通常方法(逐点)定义, 范数取函数绝对值的最大值时可视它为 Banach 空间.

引理　设 $x(q)\in E$, $q\in Q$, 对给定的元素 $q_0\in Q$, 不等式

$$|x(q_0)|>|x(q)|,\quad 对每个\ q\neq q_0 \tag{6}$$

成立, 当且仅当

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h} \tag{7}$$

对每个 $x(q)$ 都存在.

此外, 如果函数 $x(q)$ 满足不等式(6), 则有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x+hz\|}{h}=z(q_0)\cdot\operatorname{sign}x(q_0),\quad 对每个\ z(q)\in E.$$

证明 条件是必要的. 事实上,有 $\|x\|=|x(q_0)|$, 以及因为连续函数 $|x+hz|$ 达到它的绝大值, 因此得到

$$\begin{aligned}|x(q_0)+hz(q_0)|-|x(q_0)|&\leqslant\|x+hz\|-\|x\|\\&=|x(q_h)+hz(q_h)|-|x(q_0)|,\end{aligned} \tag{8}$$

其中 q_h 是 Q 中依赖于 h 的点. 现在从(8)得 $|x(q_0)+hz(q_0)|\leqslant|x(q_h)+hz(q_h)|$, 因此, $0\leqslant|x(q_0)|-|x(q_h)|\leqslant|h|\cdot|z(q_0)|+|h|\cdot|z(q_h)|\leqslant 2|h|\cdot\|z\|$, 故 $\lim\limits_{h\to 0}|x(q_h)|=|x(q_0)|$. 再由 Q 的紧性得

$$\lim_{h\to 0}q_h=q_0. \tag{9}$$

为证明引理中条件的必要性, 先考虑情形 $x(q_0)>0$. 存在 $\varepsilon>0$, 使得对 $|h|<\varepsilon$,有

$$|x(q_0)+hz(q_0)|-|x(q_0)|=x(q_0)+hz(q_0)-x(q_0)=hz(q_0),$$

以及由(9)得

$$|x(q_h)+hz(q_h)|-|x(q_0)|=x(q_h)+hz(q_h)-x(q_0)=hz(q_h),$$

因此由(8), $hz(q_0)\leqslant\|x+hz\|-\|x\|\leqslant hz(q_h)$, 再由(9)与 $x(q)$ 的连续性得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}=z(q_0).$$

当 $x(q_0)<0$, 用类似的方法得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}=-z(q_0).$$

从而证明了条件的必要性(极限(7)的存在性), 以及同时证明了引理的第二部分.

为了证明条件是充分的, 假设函数 $x(q)$ 的模在 Q 的两个不同点 q_0 和 q_1 达到最大值, 即

$$|x(q_0)|=|x(q_1)|\geqslant|x(q)|,\quad \text{对每个} q\in Q.$$

当 $x(q_0)>0$, 令 $z(q)=d(q,q_1)$. 于是有

$$\|x+hz\|-\|x\|\geqslant x(q_0)+h\cdot d(q_0,q_1)-x(q_0),$$

因此,

$$\liminf_{h\to 0+}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}\geqslant d(q_0,q_1)>0. \tag{10}$$

同时,有 $\|x+hz\|-\|x\|\geqslant|x(q_1)+hd(q_1,q_1)|-|x(q_1)|=0$, 因此

$$\limsup_{h\to 0-}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}\leqslant 0, \tag{11}$$

由不等式(10)和(11)得知极限(7)不可能存在.

当 $x(q_0)<0$, 令 $z(q)=-d(q,q_1)$ 得同样结论, 证毕.

两个集合称为同胚的, 如果存在从一个集合到另一个集合的双射, 使得它和它的逆都连续, 这样的双射称为同胚.

定理 3 两个紧距离空间 Q 和 Q_1 同胚的充分必要条件是: 在两个空间上的连续实值函数的空间 E 和 E_1 等距.

证明 必要性. 容易验证, 如果 f 是 Q 到 Q_1 的同胚, 则在 E_1 到 E 的变换作用下, 对每个函数 $y\in E_1$, 存在由 $x(q)=y[f(q)]$ 给出的对应函数 $x\in E$, 它是 E_1 到整个 E 的等距变换.

充分性. 假设空间 E 和 E_1 是等距的, 令 V 是 E 到 E_1 的等距变换, 即对所有 $x_1,x_2\in E$, 有 $\|V(x_1)-V(x_2)\|=\|x_1-x_2\|$.

令 $U(x)=V(x)-V(\Theta)$, 容易看到算子 U 与 V 有相同的性质, 此外, $U(\Theta)=\Theta$. 因此由 11.3 节定理 2, U 是有界线性算子.

设 q_0 是 Q 的给定点, $x\in E$ 是 11.4 节引理中满足不等式(6)的函数. 由于算子 U 保持范数不变, 因此对每个数 h, 若令 $U(z)=t$, $z\in E$, 则有

$$\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}=\frac{\|y+ht\|-\|y\|}{h},$$

从而, 由 11.4 节引理得

$$z(q_0)\cdot \operatorname{sign} x(q_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\|y+ht\|-\|y\|}{h}. \tag{12}$$

现在，由于算子U映E到整个E_1，极限(12)对每个$t\in E_1$存在. 因此，由引理存在$q_0'\in Q_1$，使得对Q_1的每一点$q'\neq q_0'$有$|y(q_0')|>|y(q')|$，以及

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|y+ht\|-\|y\|}{h}=t(q_0')\cdot \operatorname{sign} y(q_0'),\quad 对每个\ t\in E_1.$$

由此得知，由(12)得$z(q_0)\cdot \operatorname{sign} x(q_0)=t(q_0')\cdot \operatorname{sign} y(q_0')$，从而得到$q_0\in Q$和$q_0'\in Q_1$之间的关系：

$$t(q_0')=z(q_0)\cdot \varepsilon(q_0'),\quad 其中 |\varepsilon(q_0')|=1, \tag{13}$$

对$z\in E$和$t=U(z)$成立.

考虑从Q到Q_1由关系

$$q_0'=f(q_0)$$

定义的函数.

首先，它是一对一的. 事实上，如果$q_1'=f(q_1)=q_2'=f(q_2)$，则由(13)，对每个函数$z\in E$，有$|z(q_1)|=|z(q_2)|$. 由此，如取z为由$z(q)=d(q,q_1)$给定的特殊函数，则得$q_1=q_2$.

此外，f映Q到整个Q_1. 事实上，由于对任何$\overline{q}'\in Q_1$，令$t(q')=\dfrac{1}{1+d(q',\overline{q}')}$，由(13)有

$$|z(q_0)|=\frac{1}{1+d(q',\overline{q}')},\quad 对每个\ q_0\in Q. \tag{14}$$

现在由于$\|z\|=\|t\|=1$，存在$q_0\in Q$，使得$|z(q_0)|=1$. 因此，对点$q_0'=f(q_0)$，由(14)有$\dfrac{1}{1+d(q_0',\overline{q}')}=1$，于是$d(q_0',\overline{q}')=0$，从而$\overline{q}'=q_0'$.

最后，映射f连续. 事实上，设$q_0=\lim\limits_{n\to\infty}q_n$，以及对$n=1,2,\cdots$，令$q_n'=f(q_n)$. 由(13) 对每个$t\in E_1$，必须有$\lim\limits_{n\to\infty}|t(q_n')|=|t(q_0')|$,特别对$t(q')=d(q',q_0')$，因此有$\lim\limits_{n\to\infty}d(q_n',q_0')=d(q_0',q_0')=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}q_n'=q_0'$.

由于Q和Q_1是紧的，因此，它们都是同胚的.

附注　这个证明说明，如果U是从E到E_1的等距变换且$U(\Theta)=\Theta$，则存在

从 Q 到 Q_1 的同胚 f 以及 E_1 上的实值连续函数 ε，使得

$$y(q') = x[f^{-1}(q')] \cdot \varepsilon(q'),$$

其中 $y = U(x)$, $q' \in Q_1$，且对所有 q' 有 $|\varepsilon(q')| = 1$.

应用　特别, 由 11.4 节定理 3 得知, 连续实值函数 $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ 的空间 C，与定义在单位正方形 $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ 上的两个变量 u 和 v 的实值连续函数 $x(u,v)$ 的空间是不等距的.

但是, 在区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的 p 次方可和函数空间 L^p，与定义在单位正方形上 p 次方可和函数空间是等距的. 事实上, 存在双射 $t = \varphi(u,v)$，它保持测度映这个正方形(去掉零测度集)到区间[0,1](再次去掉零测度集), 即映可测集为等测度的可测集.

因此, 如果对每个函数 $x(t) \in L^p$ 作对应的函数 $y(u,v) = x[\varphi(u,v)]$，容易看出, 得到的这两个函数空间之间的双射, 在它作用下距离不变.

11.5　旋　　转

Banach 空间 E 关于点 $x_0 \in E$ 的*旋转*, 按定义是 E 到它自身的任何一个等距双射, 它映点 x_0 到它自身.

由 11.3 节定理 2, 每个关于 Θ 的旋转是有界线性算子.

下面在某些特殊的 Banach 空间中研究旋转.

空间 C　在 C 中关于 Θ 的大部分一般旋转, 由形如

$$y(t) = \varepsilon \cdot x[\alpha(t)]$$

的算子给出, 其中 $x(t) \in C$，$\varepsilon = +1$ 或 -1，与 x 无关, $\alpha(t)$ 是闭单位区间[0,1]到它自身的任何同胚.

证明由上面的附注并应用下面事实得知, 如果 $\varepsilon(t)$ 是[0,1]上满足 $|\varepsilon(t)| = 1$ 的实值连续函数, 则 $\varepsilon(t)$ 是常数.

空间 c　视这个空间为定义在恰有一个聚点的有界闭实数集上的实值连续函数空间. 由上面的附注可容易得到下面的定理:

c 中关于 Θ 的大部分一般旋转由 $y = U(x)$ 给出, 其中

$$x = \{\xi_n\} \in c, \quad y = \{\eta_n\} \in c \text{ 与 } \eta_n = \varepsilon_n \cdot \xi_{\varphi(n)},$$

这里 $\{\varepsilon_n\}$ 是满足 $|\varepsilon_n| = 1$, $n = 1, 2, \cdots$ 的任何收敛序列, $\varphi(n)$ 是自然数到它们自己的任意双射, 即自然数的排列.

空间 L^2 L^2 的每个关于 Θ 的旋转的形式是

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(t)\int_0^1\alpha_n(t)x(t)dt, \tag{15}$$

其中 $x(t)\in L^2$ 以及 $\{\alpha_n(t)\}$, $\{\beta_n(t)\}$, $0\leqslant t\leqslant 1$, 是 L^2 中任意的完全正交函数序列.

证明 由(15), 有

$$\int_0^1[y(t)]^2dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^1\alpha_n(t)x(t)dt\right]^2=\int_0^1x^2(t)dt,$$

因此 $\|y\|=\|x\|$. 由此每个形如(15)的变换是关于 Θ 的旋转.

反之, 设 U 是 L^2 中关于 Θ 的旋转, $\{\alpha_n(t)\}$ 是 L^2 中任何完全正交序列. 令 $\beta_n(t)=U[\alpha_n(t)]$, $n=1,2,\cdots$, 则有

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\int_0^1\alpha_n(t)x(t)dt,$$

因此 $y(t)=U[x(t)]$ 是(15)的形式. 此外

$$\int_0^1[\beta_n(t)]^2dt=\int_0^1[U(\alpha_n(t))]^2dt=\int_0^1[\alpha_n(t)]^2dt=1, \tag{16}$$

以及由于 $\beta_i(t)+\beta_j(t)=U[\alpha_i(t)+\alpha_j(t)]$, 对 $i\neq j$, 有

$$\int_0^1[\beta_i(t)+\beta_j(t)]^2dt=\int_0^1[\alpha_i(t)+\alpha_j(t)]^2dt=2,$$

因此由(16)有

$$\int_0^1\beta_i(t)\beta_j(t)dt=0,\quad 对\ i\neq j. \tag{17}$$

从而, 如果对某个函数 $\beta(t)\in L^2$, 有 $\int_0^1\beta_n(t)\beta(t)dt=0$, $n=1,2,\cdots$, 由(15)对每个函数 $y(t)\in L^2$ 有 $\int_0^1y(t)\beta(t)dt=0$, 由此得 $\beta(t)=0$. 所以与(16)和(17)一起, 得知 $\{\beta_n(t)\}$ 是 L^2 中的完全正交序列.

空间 l^2 对 l^2 可叙述完全类似的定理. 它是空间 L^2 和 l^2 等距的推论(见 11.2 节定理 1).

对空间 L^p 和 l^p，这里 $1 \leqslant p \neq 2$.有下面引理:

1. 设 U 是 L^p 关于 Θ 的旋转，其中 $1 \leqslant p \neq 2$. 如果对一对属于 L^p 的函数 $x_1(t), x_2(t)$,有

$$x_1(t) \cdot x_2(t) = 0, \quad \text{在} [0,1] \text{上几乎处处成立,} \tag{18}$$

则对函数 $y_1(t), y_2(t)$，其中 $y_1 = U(x_1)$ 和 $y_2 = U(x_2)$，也有

$$y_1(t) \cdot y_2(t) = 0, \quad \text{在} [0,1] \text{中几乎处处成立.} \tag{19}$$

证明　对每对数 α, β ，由假设(18), 有 $\| \alpha x_1 + \beta x_2 \|^p = |\alpha|^p \cdot \| x_1 \|^p + |\beta|^p \cdot \| x_2 \|^p$，因此由 y_1 和 y_2 的定义，得 $\| \alpha y_1 + \beta y_2 \|^p = |\alpha|^p \cdot \| y_1 \|^p + |\beta|^p \cdot \| y_2 \|^p$，从而

$$\int_0^1 | \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) |^p \, dt = |\alpha|^p \int_0^1 |y_1(t)|^p \, dt + |\beta|^p \int_0^1 |y_2(t)|^p \, dt. \tag{20}$$

在情形 $p = 1$，先令 $\alpha = \beta = 1$，然后令 $\alpha = -\beta = 1$,得到

$$\int_0^1 | y_1(t) + y_2(t) | \, dt = \int_0^1 | y_1(t) - y_2(t) | \, dt = \int_0^1 [| y_1(t) | + | y_2(t) |] dt,$$

这仅在条件(19)满足时才有可能.

在情形 $p > 2$，以 H 表示使得 $y_1(t) \cdot y_2(t) \neq 0$ 的 $t \in [0,1]$ 的集合，于是由(20)得关系

$$\int_0^1 | \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) |^p \, dt = |\alpha|^p \int_H | y_1(t) |^p \, dt + |\beta|^p, \tag{21}$$

由此，若令 $\varphi(\alpha, t) = | \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) |^p$，则得等式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = p \, | \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) |^{p-1} \cdot \operatorname{sign} [\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)] \cdot y_1(t) \tag{22}$$

和

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = p(p-1) \, | \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) |^{p-2} \cdot y_1^2(t). \tag{23}$$

现在，由于 $| \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) |^{p-1} \in L^{p/(p-1)}$ 以及 $y_1(t) \in L^p$,可以断言积分

$\int_0^\infty \int_H \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right| d\alpha dt$ 存在，因此由(22)有

$$\int_H \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_H \varphi(\alpha,t)dt = p \cdot \operatorname{sign} \alpha \cdot |\alpha|^{p-1} \int_H |y_1(t)|^p dt, \tag{24}$$

于是 $\int_H \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} dt = 0$；因为由(23)有 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \geqslant 0$，故立刻得知

$$\int_0^\infty \int_H \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} d\alpha dt = \int_H \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} dt,$$

所以由(24)得

$$\int_H \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} dt = p(p-1)|\alpha|^{p-2} \int_H |y_1(t)|^p dt,$$

从而由(23)得

$$\int_H |\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^{p-2} \cdot y_1^2(t) dt = |\alpha|^{p-2} \int_H |y_1(t)|^p dt. \tag{25}$$

由(25)，令 $\alpha = 0$ 和 $\beta = 1$，得等式

$$\int_H |y_2(t)|^{p-2} \cdot |y_1(t)|^2 \, dt = 0, \tag{26}$$

由此，由 H 的定义得 H 的测度 $m(H) = 0$①.

最后，在情形 $1 < p < 2$，对 $i = 1$ 和 $i=2$ 考虑函数 Y_i，其中 $Y_i(y) = \int_0^1 Y_i(t)y(t)dt$，$y(t) \in L^p$ 以及 $Y_i(t) = |y_i(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} y_i(t)$．$U$ 的伴随算子 U^* 是空间 $L^{p/(p-1)}$ 关于 Θ 的旋转(证明见 11.9 节定理 11 的证明)．令 $X_i = U^*(Y_i)$ 与 $X_i(x) = \int_0^1 X_i(t)x(t)dt$，其中 $x \in L^p$，有 $X_i(x_i) = Y_i(y_i) = \|Y_i\| \cdot \|y_i\| = \|X_i\| \cdot \|x_i\|$，因此由 Riesz 不等式，对使得 $x_i(t) = 0$ 的相同 t 值，有 $X_i(t) = 0$．因此，$X_1(t) \cdot X_2(t) = 0$．又由于 $\frac{p}{p-2} > 2$，由上面考虑的情形得 $Y_1(t) \cdot Y_2(t) = 0$，所以 $y_1(t) \cdot y_2(t) = 0$．于是条件(19)得证.

2. 设 U 是 l^p 关于 Θ 的一个旋转，其中 $1 \leqslant p \neq 2$．若对属于 l^p 的两个序列 $x_1 = \{\xi_n^{(1)}\}$ 和 $x_2 = \{\xi_n^{(2)}\}$ 有

---

① mH 表示集合 H 的测度(见引言 A.3).

$$\eta_n^{(1)} \cdot \eta_n^{(2)} = 0, \quad 对\ n = 1, 2, \cdots,$$

则对序列 $y_1 = U(x_1) = \{\eta_n^{(1)}\}$ 和 $y_2 = U(x_2) = \{\eta_n^{(2)}\}$，有等式

$$\eta_n^{(1)} \cdot \eta_n^{(2)} = 0, \quad 对\ n = 1, 2, \cdots.$$

证明类似于上面对 L^p 空间的引理，并作适当的明显修改.

由这两条引理分别得到下面关于旋转的一般形式的定理.

I. 设 U 是空间 L^p 关于 Θ 的旋转，$1 \leqslant p < 2$，则存在定义在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的两个函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，使得下面条件满足：

(a) 函数 $\varphi(t)$ 以可测集映为可测集的方式，将闭区间[0,1]内几乎所有点双射地映为(几乎所有)它自身，反之亦然.

(b) 对几乎每个 $t \in [0,1]$，有

$$\psi(t) = \left[\lim_{h \to 0+} \frac{m(\varphi[t, t+h])}{h} \right]^{\frac{1}{p}},$$

其中 $\varphi([t, t+h]) = \{\varphi(s) : t \leqslant s \leqslant t+h\}$ 是闭区间 $[t, t+h]$ 在函数 φ 作用下的像.

(c) 对每个 $x \in L^p$，有

$$y(t) = x[\varphi(t)] \cdot \psi(t),$$

其中 $y(t) = U[x(t)]$.

反之，如果 $\varphi(t)$ 是满足条件(a)的函数，则存在由(b)定义的函数 $\psi(t)$，以及由(c)定义的算子 U 是 L^p 关于 Θ 的旋转.

II. 设 U 是空间 L^p 关于 Θ 的任何一个旋转，$1 \leqslant p \neq 2$，则存在函数 $\varphi(n)$ 和数列 $\{\varepsilon_n\}$，使得

(a) φ 是自然数的一个排列；

(b) $|\varepsilon_n| = 1$，对 $n = 1, 2, \cdots$；

(c) 对每对数列 $x = \{\xi_n\} \in l^p$ 和 $y = \{\eta_n\} \in l^p$，其中 $y = U(x)$，有

$$\eta_n = \varepsilon_n \cdot \xi_{\varphi(n)}, \quad 对\ n = 1, 2, \cdots.$$

反之，对任何满足条件(a)和(b)的 φ 和 $\{\varepsilon_n\}$，由 $y = U(x)$ 给出并由条件(c)定义的算子 U 是一个旋转.

证明　首先设 U 是 L^p 关于 Θ 的旋转. 令

$$\xi_n^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{对 } i = n, \\ 0, & \text{对 } i \neq n, \end{cases} \tag{27}$$

以及 $x_i = \{\xi_n^{(i)}\}$, 对$i = 1, 2, \cdots$. 显然对每个 $x = \{\xi_n\} \in l^p$ 有

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i. \tag{28}$$

令 $y_i = U(x_i) = \{\eta_n^{(i)}\}$，于是对 $y = U(x) = \{\eta_n\}$，由(28)有等式 $y = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i$，因此

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_n^{(i)}, \quad \text{对 } n = 1, 2, \cdots. \tag{29}$$

由(27)当$i \neq j$时, 有 $\xi_n^{(i)} \cdot \xi_n^{(j)} = 0$；因此, 由 11.5 第二个引理得

$$\eta_n^{(i)} \cdot \eta_n^{(j)} = 0, \quad \text{对 } i \neq j \text{ 和 } n = 1, 2, \cdots. \tag{30}$$

由于 y 可以是属于 l^p 的任何序列, 由(29)和(30), 对每个自然数 n，恰好存在一个自然数 $\varphi(n)$，使得 $\eta_n^{\varphi(n)} \neq 0$. 由此和(29)有

$$\eta_n = \xi_{\varphi(n)} \cdot \varepsilon_n, \quad \text{对 } \varepsilon_n = \eta_n^{\varphi(n)} \text{ 和 } n = 1, 2, \cdots, \tag{31}$$

因此条件(c)满足.

进一步, 由 $n_1 \neq n_2$ 得 $\varphi(n_1) \neq \varphi(n_2)$，若不然, 由(31)对每个序列 $\{\eta_n\} \in l^p$，有等式 $\varepsilon_{n_2}\eta_{n_1} - \varepsilon_{n_1}\eta_{n_2} = 0$，这是不可能的； 此外, 如果存在自然数 n_0，使得对 $n = 1, 2, \cdots$，有 $\varphi(n) \neq n_0$，由(31)对序列 $x = \{\xi_n\}$ 和 $n = 1, 2, \cdots$，有等式 $\eta_n = 0$，其中

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{对 } n = n_0, \\ 0, & \text{对 } n \neq n_0, \end{cases}$$

这是不可能的. 从而条件(a)得到证明.

最后, 由旋转的定义, 有 $\|y\| = \|x\|$, 由此和(31)得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_{\varphi(n)}|^p \cdot |\varepsilon_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p, \quad \text{对每个 } x = \{\xi_n\} \in l^p. \tag{32}$$

因此, 如果给定任何自然数 n_0，可以选取子序列 $x = \{\xi_n\}$，使得

$$\xi_{\varphi(n)}=\begin{cases}1, & 对\ n=n_0,\\ 0, & 对\ n\neq n_0,\end{cases}$$

由(32)得$|\varepsilon_{n_0}|^p=1$，因此$|\varepsilon_{n_0}|=1$，这就证明了条件(b).

其逆是显然的.

11.6　同构与等价

两个F空间E和E_1称为同构，倘若存在将E映为整个E_1的双射有界线性算子.

假设U是这样的算子，由 3.3 节定理 5 逆U^{-1}也是有界线性算子，由此得知U是同胚.

空间E和E_1称为是等价的，如果存在从E到E_1的双射有界线性算子U，使得对每个$x\in E$有$|U(x)|=|x|$.

如果两个空间等价，则它们必须同构，但可以看到其逆不真.

考虑两个例子：

① 设c_0是收敛于 0 的实数序列空间. 则有定理：空间c和c_0同构.

事实上，如果对$x=\{\xi_i\}\in c$，令

$$\eta_1=\lim_{i\to\infty}\xi_i\ \ 和\ \ \eta_i=\xi_{i-1}-\eta_1,\ \ 对\ \ i>1,$$

显然有$\lim\limits_{i\to\infty}\eta_i=0$，因此，若令$y=\{\eta_i\}$，则有$y\in c_0$. 容易看到这样定义的算子$y=U(x)$是加性的且满足条件$\|U(x)\|\leqslant 2\|x\|$；因此它是一个有界线性算子.

反之，如果$y=\{\eta_i\}\in c_0$，只需令$x=\{\xi_i\}$，

$$\xi_i=\eta_{i+1}+\eta_1,\ \ 其中\ \ i=1,2,\cdots,$$

得到$x\in c$，因为$\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i=\eta_1$，并看到由$y=0$得$x=0$.

由此得知U是有界线性算子，它将c双射映到c_0.

② 定义在空间

$$L^p,\ l^p(\ p>1\ ),\ L^1,\ l^1\ \ 和\ \ c$$

上的有界线性泛函空间，分别等价于空间

$$L^q,\ l^q(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1),\ M,\ m\ \ 和\ \ l^1.$$

这只是 4.4 节建立的有界线性泛函一般形式定理的重叙.

由 11.3 节定理 2 立刻得

定理 4 两个等距的 Banach 空间等价.

11.7 Banach 空间的积

给定两个 Banach 空间 E 和 E_1，令 $E\times E_1$ 表示所有有序对 (x,y) 的空间，其中 $x\in E$ ，$y\in E_1$，加法和数量乘法由

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \text{ 和 } h(x,y)=(hx,hy)$$

定义. 当然，其中 $x,x'\in E$, $y,y'\in E_1$ 以及 h 是数，且范数定义要满足下面条件：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0\text{，当且仅当} \lim_{n\to\infty} \|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)\|=0. \tag{33}$$

如此定义的空间 $E\times E_1$ 也是 Banach 空间，称它为空间 E 和 E_1 的积.

容易看出，如果特别对 $z=(x,y)$ 的范数取下面表达式或者其他的表达式：

① $\|z\|=[\|x\|^p+\|y\|^p]^{\frac{1}{p}}$，其中 $p\geqslant 1$,

② $\|z\|=\max[\|x\|,\|y\|]$,

条件(33)也将满足. 这些不是满足条件(33)的仅有的表达式.

此外，很清楚不管取哪个范数，只要它们满足条件(33)，总可以得到同构的空间.

为明确取哪个范数，用 $(E\times E_1)_{l^p}$ 表示空间 E 和 E_1 的积赋予范数①，用 $(E\times E_1)_\infty$ 表示空间 E 和 E_1 的积赋予范数②.

类似地定义有限个 Banach 空间的积 $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$. 显然可分空间的积是可分的.

积 $E\times E$ 称为 E 的平方，记为 E^2.

定理 5 空间 $L^p, l^p, p\geqslant 1$ 和空间 c 与它们的平方是同构的.

证明 对每个函数 $x(t)\in L^p$，只需考虑由公式

$$x_1(t)=x\left(\frac{t}{2}\right) \text{ 和 } x_2(t)=x\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right), \quad \text{其中 } 0\leqslant t\leqslant 1$$

定义相应的函数对 $(x_1(t),x_2(t))$ 给出从 L^p 双射映到 $(L^p)^2$ 的有界线性算子.

类似地，对每个序列 $x=\{\xi_n\}\in l^p$，只需考虑由公式

$$\eta_n = \xi_{2n} \text{ 和 } \zeta_n = \xi_{2n-1}, \quad \text{对 } n = 1, 2, \cdots$$

定义相应的一对序列 $x_1 = \{\eta_n\}, x_2 = \{\zeta_n\}$，可看到有界线性算子将 l^p 双射映为 $(l^p)^2$.

最后, 对每个序列 $x = \{\xi_n\} \in c$，考虑由公式

$$\eta_n = \xi_{2n} - \xi_1 \text{ 和 } \zeta_n = \xi_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} \xi_n + \xi_1, \quad \text{对 } n = 1, 2, \cdots$$

定义相应的序列对 $x_1 = \{\eta_n\}, x_2 = \{\zeta_n\}$.

有

$$\xi_1 = \lim_{n\to\infty} \zeta_n, \quad \xi_{2n} = \eta_n + \lim_{n\to\infty} \zeta_n \text{ 和 } \xi_{2n+1} = \zeta_n + \lim_{n\to\infty} \eta_n, \quad \text{对 } n = 1, 2, \cdots,$$

因而可看到有从 c 到 c^2 的有界线性双射.

定理 6　空间 C 与积 $C \times c$ 同构[①].

证明　设 E 表示由满足条件

$$x\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \quad \text{对 } n = 1, 2, \cdots$$

的函数 $x(t) \in C$ 组成的 C 的子空间. 对每个函数 $x(t) \in C$，构造函数 $\overline{x}(t) \in C$ 使得 $\overline{x}\left(\frac{1}{n}\right) = x\left(\frac{1}{n}\right)$，且对每个自然数 n，它是区间 $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ 内的线性函数.

与每个 $x(t) \in C$，相应的有一对函数(由函数与数列组成)

$$\left(y(t), \left(x\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right), \quad \text{其中 } y(t) = x(t) - \overline{x}(t).$$

显然有 $y(t) \in E$ 和 $\left(x\left(\frac{1}{n}\right)\right) \in c$.

容易看出这相应地定义了一个有界线性算子.

同样看到, 对每对 $(y(t), (\xi_n)) \in E \times c$，存在连续函数 $x(t)$，使得 $y(t) = x(t) - \overline{x}(t)$ 和 $\xi_n = x\left(\frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \cdots$, 由此得知考虑的变换是整个 C 和整个 $E \times c$ 之间的双射, 因此这两个空间是同构的.

从而空间 $E \times c$ 与 $E \times c \times c = E \times c^2$ 同构. 现在, 由于 c^2 与 c 同构, 由 11.7 节定

① 这个定理的证明是 M. K. Borsuk 建立的.

理 5, 空间 $C\times c$ 与 $E\times c$ 同构, 从而与 C 同构, 证毕.

定理 7 空间 C 与每个空间 $C^{(p)}$ 同构, 其中 $p=1,2,\cdots$[①].

证明 与每个函数 $x(t)\in C^{(p)}$ (见引言 B.7), 相应的由函数 $y(t)=x^{(p)}(t)$ 和 p 个数 $x(0),x'(0),\cdots,x^{(p-1)}(0)$ 的集合组成的对, 以 R^p 记 p 维空间, 于是 $C^{(p)}$ 与 $C\times R^p$ 同构, 因此由 11.7 节定理 6 它与 $C\times c\times R^p$ 同构.

又由于 $c\times R^p$ 与 c 同构, 空间 $C^{(p)}$ 与 $C\times c$ 同构, 从而再由 11.7 节定理 6 它与 C 同构, 证毕.

定理 8 空间 C 与空间 C^2 同构.

证明 考虑与 C 的函数对 $\left(x(t),y(t)\right)$ 相应的对 $\left(z(t),\xi\right)$, 其中 $z(t)\in C$ 是由公式

$$z(t)=\begin{cases} x(2t), & \text{对 } 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2} \\ y(2t-1)-y(0)+x(1), & \text{对 } \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

定义的函数, 对每个 $y(t)\in C$, ξ 是由方程 $\xi=y(0)$ 确定的数.

于是空间 C^2 映为 $C\times R$, 其中 R 是实直线. 这个变换是有界线性算子, 因为由定义有 $x(t)=z\left(\dfrac{t}{2}\right)$ 和 $y(t)=z\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{t}{2}\right)-z\left(\dfrac{1}{2}\right)+\xi$, 它是双射. 所以建立了空间 C^2 与空间 $C\times R$ 的同构, 又由 11.7 节定理 6 得知 C 与 $C\times c$ 同构, 空间 C^2 与 $C\times c\times R$ 同构, 故由于 $c\times R$ 与 c 同构, 因此, 再由 11.7 节定理 6 空间 $C\times c$ 与空间 C 同构, 证毕.

附注 不能确定空间 C 是否与定义在单位正方形上的所有连续(实值)函数的空间同构.

11.8 空间 C 作为泛空间[②]

定理 9 每个可分的 Banach 空间 E 等价于空间 C 的闭线性子空间.

证明 设 Γ 是 E 上范数 $\leqslant 1$ 的所有有界线性泛函的集合, $\{x_n\}$ 是 E 中满足 $\|x_n\|\leqslant 1$, $n=1,2,\cdots$ 的序列, 它在球 $\{x\in E:\|x\|\leqslant 1\}$ 内稠.

在 Γ 内对每对属于 Γ 的泛函 f_1,f_2, 用

$$d(f_1,f_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|f_1(x_n)-f_2(x_n)|}{1+|f_1(x_n)-f_2(x_n)|} \tag{34}$$

① 这个定理和 11.7 节定理 8 都是 M .K. Borsuk 证明的.

② 这一节的定理是 M. S. Mazur 和我共同发现的.

定义它们之间的距离.

证明 Γ 在这个距离定义下是紧距离空间.

考虑序列 $\{f_i\}\subseteq\Gamma$ 使得 $\lim\limits_{p,q\to\infty} d(f_p,f_q)=0$. 由(34), $\lim\limits_{i\to\infty}f_i(x_n)$存在. 由于 $\|f_i\|\leqslant 1$, 由 5.1 节定理 3, 得知序列 $\{f_i(x)\}$ 对每个 $x\in E$ 收敛; 因此泛函序列 $\{f_i\}$ 弱收敛于有界线性泛函 f, 例如 $\|f\|\leqslant 1$, 因此 $f\in\Gamma$. 由于 $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(x_n)=f(x_n)$, 对 $n=1,2,\cdots$, 由(34)得知 $\lim\limits_{i\to\infty} d(f_i,f)=0$, 因此 Γ 是完备的.

现在任给序列 $\{f_i\}\subseteq\Gamma$, 由对角线法则, 可以选取子序列 $\{f_{i_k}\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} f_{i_k}(x_n)$ 对 $n=1,2,\cdots$ 存在, 因此如上又可得到满足 $\lim\limits_{k\to\infty} d(f_{i_k},f)=0$ 的泛函 $f\in\Gamma$ 存在. 因此 Γ 是紧的, 从而是紧距离空间.

因此, 存在映(完满无处稠)Cantor 集 $P\subseteq[0,1]$ 到空间 Γ 的连续映射①. 如果 $f_t\in\Gamma$ 表示点 $t\in P$ 在这个映射下的像, 设 $x\in E$ 是任意元素, 定义 $y(t)$ 如下: 对每点 $t\in P$, 令

$$y(t)=f_t(x),$$

对集合 $[0,1]\setminus P$ 的点, 函数 $y(t)$ 完全以线性方式定义, 特别, 对 $t\in[0,1]\setminus P$, 令

$$y(t)=\frac{y(t')-y(t'')}{t'-t''}\cdot(t-t'')+y(t''),$$

其中 t' 和 t'' 表示满足 $t'<t<t''$ 的 P 的最近点.

下面研究如此定义的函数 $y(t)$ 的性质.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=t$, 其中 $\{t_n\}\subseteq P$, 序列 $\{f_{t_n}\}$ 弱收敛于 f_{t_0}, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f_{t_n}(x)=f_{t_0}(x)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} y(t_n)=y(t_0)$. 因此函数 y 在 P 中连续. 由于它在别处是线性的, 因此它在整个[0,1]上连续, 从而 $y(t)\in C$.

此外, 由 4.2 节定理 3, 存在泛函 $f\in\Gamma$ 使得 $|f(x)|=\|x\|$. 设 $t_0\in[0,1]$ 是满足使得 $f=f_{t_0}$ 的点. 于是有 $|y(t_0)|=|f_{t_0}(x)|=\|x\|$, 又因

$$|y(t)|=|f_t(x)|\leqslant|f_t|\cdot\|x\|\leqslant\|x\|,\quad \text{对每个 } t\in P,$$

函数 $|y(t)|$ 在集合 P 上达到它的绝大值, 所以得到 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|y(t)|=\|x\|$.

从而对应每个元素 $x\in E$ 有元素 $y=y(t)\in C$, 令 $y=U(x)$, 这里定义了一个加性算子. 由于 $\|y\|=U(x)\|=\|x\|$, 它事实上是有界线性算子, 并且等距映空间

---

① 例如见 F. Hausdorff. Mengenlehre. Berlin, 1927: 197.

E 为 C 的子空间 E_1. 因此空间 E 和 E_1 是等价的, 证毕.

定理 10 每个可分距离空间 E 可等距映为 C 的子集.

证明 由 M. Fréchet 的说明①, 每个可分距离空间 E 可等距映为 m 的子集. 这样的映射可以如下得到, 容易验证与每点 $x\in E$, 对应的序列 $\{\xi_n\}$ 由公式

$$\xi_n = d(x,x_n) - d(x_0,x_n), \quad 对\ n=1,2,\cdots$$

定义, 其中序列 $\{x_n\}$ 组成 E 的稠子集.

因此, 只需考虑情形 $E\subseteq m$ 就够了. 容易证明, 由 E 元素的所有线性组合连同它们的序列的所有极限一起构成的空间是可分的 Banach 空间.

由 11.8 节定理 9, 存在这个空间的子集 E 到 C 的子空间的等距映射, 证毕.

附注 由 11.8 节定理 9 和定理 10, 空间 C 可视为可分 Banach(相应的距离)空间的泛空间. 因此对可分 Banach 空间的研究就化为对空间 C 的闭线性子空间的研究.

11.9 对偶空间

给定一个 Banach 空间 E, 定义在 E 上的所有有界线性泛函的空间 E^* 显然是另一个 Banach 空间. 称 E^* 为 E 的**对偶空间**或**共轭空间**.

定理 11 如果两个 Banach 空间 E 和 E_1 分别同构或者等价, 则空间 E^* 和 E_1^* 同样分别地同构或者等价.

证明 事实上, 如果 U 是 E 到 E_1 的线性同胚, 由 10.1 节定理 5, 得知伴随算子 U^* 也是 E_1^* 到 E^* 的线性同胚, 因此后面两个空间是同构的.

进一步, 如果 E 和 E_1 等价, 当 $X=U^*(Y)$ 时, 有

$$\|X\| = \sup_{\|x\|\le 1}|X(x)| = \sup_{\|x\|\le 1}|Y(U(x))| = \sup_{\|y\|\le 1}|Y(y)| = \|Y\|,$$

因此这时空间 E^* 和 E_1^* 等价. 证明完毕.

附注 但是, 空间 E^* 和 E_1^* 的等价性不能永远导致空间 E 和 E_1 的等价性.

例如, 考虑空间 $E=c$ 和 $E_1=(c)_\infty^2$. 这两个空间的对偶空间是 $E^*=l^1$ 和 $E_1^*=(l^1)_{l^1}^2$, 容易证明它们是等价的②.

但是, 空间 E 和 E_1 的等价性并不成立. 可以视 E 为定义在由数 0 和

---

① 参看 M. Fréchet. Les dimensions d'un ensemble abstrait. Math. Annalen, 1910,68: 161.

② 其中符号中足标的意义见 11.7 节.

$\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$, 组成的集合 Q 上的连续实值函数空间, E_1 可视为定义在由数 $0,1,\frac{1}{n}$ 和 $1+\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$, 组成的集合 Q_1 上的连续实值函数空间. 现在由于问题中的集合 Q 和 Q_1 不同胚, 因此由 11.4 节定理 3, 空间 E 和 E_1 不等距, 从而更不等价.

定理 12 如果对偶空间 E^* 可分, 则空间 E 也可分.

证明 设 $\Gamma \subseteq E^*$ 表示 E 上所有范数为 1 的有界线性泛函的集合, 则由假设, 存在在 Γ 中的稠序列 $\{x_n\} \subseteq \Gamma$.

设 $\{x_n\}$ 是 E 中满足条件

$$\| x_n \| = 1 \text{ 和 } X(x) > \frac{1}{2}, \quad \text{对 } n=1,2,\cdots \tag{35}$$

的元素序列.

如果空间 E 不可分, 则序列 $\{x_n\}$ 在 E 中不是基本的, 因此由 4.3 节定理 7 它们不是全的. 从而存在泛函 $X \in \Gamma$, 使得

$$\| X \| = 1 \text{ 和 } X(x_n) = 0, \quad \text{对 } n=1,2,\cdots. \tag{36}$$

令 $Z_n = X_n - X$, 由(35)和(36)有 $Z_n(x_n) = X_n(x_n) - X(x_n) > \frac{1}{2}$, 因此 $\| Z_n \| > \frac{1}{2}$, 故对每个自然数 n 有 $\| X_n - X \| > \frac{1}{2}$, 但这是不可能的, 因为序列 $\{X_n\}$ 按假设在 Γ 中是稠的且 X 属于 Γ.

定理 13 设 E 是可分 Banach 空间, 若 E 元素的每个范数有界序列 $\{x_i\}$ 包含弱收敛于 E 元素的子序列, 则空间 E 等价于空间 E^{**} (E^* 的对偶).

证明 设 G 是定义在 E^* 上有界线性泛函 F 的集合, 对每个 $X \in E^*$ 和某个与 F 无关的 $x_0 \in E$, 它有形式 $F(X) = X(x_0)$. 因此有 $|F(X)| \leqslant \| X \| \cdot \| x_0 \|$, 故 $\| F \| \leqslant \| x_0 \|$. 此外, 由 4.2 节定理 3, 存在泛函 $X_0 \in E^*$ 使得 $\| X_0 \| = 1$ 和 $X_0(x_0) = \| x_0 \|$, 故 $F(X_0) = \| x_0 \|$, 因此 $\| F \| \geqslant \| x_0 \|$. 由此得 $\| F \| = \| x_0 \|$.

G 是 E^* 中所有有界线性泛函的空间 E^{**} 的全子集.

事实上, 如果对某个 $X_0 \in E^*$, 对任何 $F \in G$ 有 $F(X_0) = 0$, 则对任何 $x \in E$ 也有 $X_0(x) = 0$, 因此 $X_0 = 0$.

现在证明集合 G 是超限闭的.

为此设 θ 是任一极限序数, 以及对 $1 \leqslant \xi < \theta$, $(F_\xi) \subseteq G$ 是范数有界的超限泛函序列, 则存在数 $M > 0$, 使得对 $1 \leqslant \xi < \theta$ 有 $\| F_\xi \| < M$, 而由 G 的定义, 每个泛函 F_ξ 有形式 $F_\xi(X) = X(x_\xi)$. 设 $\{x_i\}$ 是在 E 中的稠序列, 由假设它是可分的.

对每个自然数n，设$x_\xi^{(n)}$是$\{x_i\}$满足不等式

$$\| x_\xi^{(n)} - x_\xi \| < \frac{1}{n} \tag{37}$$

的任何项，令

$$F_\xi^{(n)}(X) = X(x_\xi^{(n)}), \quad 对\ X \in E^*.$$

当θ与ω共尾时(因此这时存在超限数序列$\{\xi_i\}$，使得对$i=1,2,\cdots$，有$\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i=\theta$和$\xi_i<0$)，序列$\{x_{\xi_i}^{(n)}\}$包含弱收敛于元素$x^{(n)}\in E$的子序列. 于是显然有

$$\overline{\lim_{\xi\to\theta}} F_\xi^{(n)}(X) \geqslant \overline{\lim_{i\to\infty}} F_{\xi_i}^{(n)}(X) = \overline{\lim_{i\to\infty}} X(x_{\xi_i}^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)}),$$

因此泛函$F^{(n)}(X)=X(x^{(n)})$是序列$\{F_\xi^{(n)}\}$的超限极限.

当有限序数θ不与ω共尾时，由定义，超限序列$\{x_\xi^{(n)}\}$至多有可数多个不同的项包含项$x^{(n)}$，使得对每个$\eta<\theta$，存在$\xi>\eta$满足$x_\xi^{(n)}=x^{(n)}$. 于是有

$$\overline{\lim_{\xi\to\theta}} F_\xi^{(n)}(X) = \overline{\lim_{\xi\to\theta}} X(x_\xi^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)}),$$

由此得知泛函$F^{(n)}(X)=X(x^{(n)})$又是序列$\{F_\xi^{(n)}\}$的超限极限.

这就建立了所考虑的序列$\{x^{(n)}\}$，它包含弱收敛于$\overline{x}\in E$的子序列. 令$X(\overline{x})=F_0(X)$,则一方面有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F^{(n)}(X) \geqslant F_0(X), \quad 对每个\ X\in E^*, \tag{38}$$

另一方面，由G的定义，$F_0\in G$. 现在由(37)有$X(x_\xi)\geqslant X(x_\xi^{(n)})-\frac{1}{n}\|X\|$，因此由$F_\xi$和$F_\xi^{(n)}$的定义，有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{\xi\to\theta}} F_\xi(X) &= \overline{\lim_{\xi\to\theta}} X(x_\xi) \geqslant \overline{\lim_{\xi\to\theta}} X(x_\xi^{(n)}) - \frac{1}{n}\|X\| \\ &= \overline{\lim_{\xi\to\theta}} F_\xi^{(n)}(X) - \frac{1}{n}\|X\| \geqslant F^{(n)}(X) - \frac{1}{n}\|X\|.\end{aligned}$$

因此，由(38)，$\overline{\lim\limits_{\xi\to\theta}} F_\xi(X) \geqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} F^{(n)}(X) \geqslant F_0(X)$，从而泛函$F_0$是序列$\{F_\xi\}$的超限极限. 又因为$F_0\in G$，集合$G$实际上是超限闭的.

由于它既是全的又是超限闭的, 从 8.2 节附注和 8.3 节引理 3 一起得知, 集合 G 等于整个空间 E^{**}.

由 G 的定义, 对应于每个 $F \in E^{**}$, 存在 $x \in E$, 使得正如开始证明的, 有 $\| F \| = \| x \|$. 因此由 $U(x) = F$ 定义的算子 U 是有界线性双射, 它映 E 为 E^{**} 而不改变范数. 因此空间 E 和 E^{**} 等价, 证明完毕.

附注　例如空间 L^p 和 l^p, $p > 1$, 等价于它们的有界线性泛函空间(见 11.6 节②)的对偶空间.

定理 14　Banach 空间积的对偶空间同构于它们对偶的积.

证明　设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 Banach 空间, 必须建立空间 E^* 和 $E_1^* \times E_2^* \times \cdots \times E_n^*$ 的同构, 其中 $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. 只需考虑 $n = 2$ 的情形.

设 x_1, x_2 和 z 分别表示 E_1, E_2 和 E 的元素, X_1, X_2 和 Z 分别表示在这些空间中的有界线性泛函.

设 H 是所有偶 (x_1, θ) 的集合, 其中 $x_1 \in E_1$. 可视 H 为 $E = E_1 \times E_2$ 的子集, 因此每个限制在空间 H 上的有界线性泛函 Z, 由在 E_1 上的有界线性泛函 X_1 所确定. 令

$$Z(z) = X_1(x_1), \quad 对\ z = (x_1, \theta),$$

类似地, 令

$$Z(z) = X_2(x_2), \quad 对\ z = (\theta, x_2).$$

容易验证, 对 $z = (x_1, x_2)$, 有

$$Z(z) = X_1(x_1) + X_2(x_2). \tag{39}$$

反之, 给定两个有界线性泛函 $X_1 \in E_1^*$ 和 $X_2 \in E_2^*$, 公式(39)定义了泛函 $Z \in E^*$.

相应的是双射, 取从 $E_1^* \times E_2^*$ 到整个 E^* 的有界线性泛函的形式, 因此这两个空间是同构的, 证明完毕.

附注　分别令 $E = [E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n]_{l^p}$ 或者 $E = [E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n]_\infty$, 容易看出, 对偶空间 E^* 与空间 $[E_1^* \times E_2^* \times \cdots \times E_n^*]_{l^{p/(p-1)}}$ 同构, 其中 $p > 1$. 对 $p = 1$,它分别与空间 $[E_1^* \times E_2^* \times \cdots \times E_n^*]_\infty$ 或者与空间 $[E_1^* \times E_2^* \times \cdots \times E_n^*]_{l^1}$ 同构.

第 12 章　线 性 维 数

12.1　定　　义

给定两个 F 空间 E 和 E_1，如果 E 与 E_1 的闭线性子空间同构，就说空间 E 的线性维数不超过空间 E_1 的线性维数，用符号记为

$$\dim_l E \leqslant \dim_l E_1 . \tag{1}$$

当(1)和

$$\dim_l E_1 \leqslant \dim_l E \tag{2}$$

同时成立时，就说空间 E 和 E_1 有相同的线性维数.

当(1)成立但(2)不成立时，就说 E 的线性维数严格小于 E_1 的线性维数. 用符号记为

$$\dim_l E < \dim_l E_1 .$$

最后，当(1)和(2)都不成立时，就说两个空间的线性维数不可比较.

同构空间总有相同的线性维数，但不知其逆是否成立，不过它类似于存在 Banach 空间，它们是可分的且有相同的线性维数但不同构.

每个与 n 维 Euclid 空间同构的空间将简单地称为是 n 维的. 对不存在这样的 n 的 Banach 空间称为是无穷维的.

12.2　空间 c 和 $l^p(p\geqslant 1)$的维数

定理 1　如果对 Banach 空间 E 有

$$\dim_l E < \dim_l c \tag{3}$$

或者

$$\dim_l E < \dim_l l^p , \quad \text{对某 } p \geqslant 1, \tag{4}$$

则 E 是有限维空间.

证明　由于空间 c 与收敛于 0 的数列空间 c_0 (见 11.6 节①)同构, 由(3), 存在闭线性子空间 $G \subseteq c_0$ 与 E 同构. 如果 E 是无穷维的, 从而 G 是无穷维的, 则对每个自然数 N, 存在 $N+1$ 个元素的序列 $z_i \in G$, $i=1,2,\cdots,N+1$, 使得

$$由\ \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i z_i = 0\ 得\ \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{N+1} = 0.$$

因此若令 $z_i = \{\beta_n^i\}$, 可以找到不全为零的数 $\alpha_i, i=1,2,\cdots,N+1$ 满足方程 $\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \beta_n^i = 0$, 对 $n=1,2,\cdots,N$. 用 $\{\beta_n\}$ 表示序列 $z = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i z_i$, 于是得到

$$\| z \| > 0\ 和\ \beta_n = 0, \quad 对\ n=1,2,\cdots,N. \tag{5}$$

从而对每个自然数 N, 建立了满足(5)的 G 的元素 $z = \{\beta_n\}$ 的存在性.

现在由归纳法定义 G 的元素序列 $\{y_i\}$, 其中 $y_i = \{\eta_n^i\}$, 选取 G 的任何满足 $\| y_1 \| = 1$ 的元素 y_1, 以及 G 的元素 $y_i, i=1,2,\cdots$, 使得

$$\| y_i \| = 1\ 和\ \eta_n^i = 0, \quad 对\ n=1,2,\cdots,N_{i-1} \tag{6}$$

这里 N_{i-1} 是满足不等式

$$| \eta_n^{i-1} | < \frac{1}{3^{i-1}}, \quad 对每个\ n > N_{i-1} \tag{7}$$

的最小自然数.

这样的序列 $\{y_i\}$ 的存在性是上面结果的直接推论.

设 G_0 是由所有形如 $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i$, $r=1,2,\cdots$ 的多项式和所有它的序列的极限在一起组成的集合, 即 G_0 是所有这类多项式集合的闭包. G_0 显然是 c_0 的闭线性子空间.

设 $x = \{\xi_i\}$ 是任何有界序列, 令

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_n^i, \quad 对\ n=1,2,\cdots, \tag{8}$$

证明

$$\frac{1}{6} \| x \| \leqslant \sup_{n \geqslant 1} | \eta_n | \leqslant \frac{3}{2} \| x \|. \tag{9}$$

事实上，给定下标 n，由(6)存在自然数 m_i，使得

$$|\eta^i_{m_i}|=1,\quad 对\ i=1,2,\cdots, \tag{10}$$

因此由 N_i 的定义，有

$$N_{i-1}\leqslant m_i<N_i, \tag{11}$$

从而，$\lim\limits_{i\to\infty}N_i=\infty$，因此存在自然数 k，使得对问题中的下标 n 有

$$N_{k-1}\leqslant n<N_k, \tag{12}$$

其中 $N_0=1$.

由此对每个 $i>k$，由(11)有 $N_k\leqslant N_{i-1}$，从而由(12)有 $n<N_{i-1}$. 由(6)对每个 $i>k$ 得到 $\eta^i_n=0$，从而由(8)得

$$\eta_n=\sum_{i=1}^{k}\xi_i\eta^i_n. \tag{13}$$

对每个 $i<k$，由(11)也有 $N_i\leqslant N_{k-1}$，因此由(12)有 $N_i\leqslant n$，故由(7)得 $|\eta^i_n|<\dfrac{1}{3^i}$. 由于对每个 i 有 $|\eta^k_n|\leqslant 1$ 和 $|\xi_i|\leqslant\|x\|$，由此和(13)得知，一方面有

$$|\eta_n|\leqslant\|x\|\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{3^i}+\|x\|\leqslant\frac{3}{2}\|x\|,$$

因此

$$\sup_{n\geqslant 1}|\eta_n|\leqslant\frac{3}{2}\|x\|. \tag{14}$$

另一方面，对每个满足(12)的 k 有

$$|\eta_n|\geqslant|\xi_k|\cdot|\eta^k_n|-\|x\|\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{3^i}\geqslant|\xi_k|\cdot|\eta^k_n|-\frac{1}{2}\|x\|. \tag{15}$$

现在存在 k 使得 $|\xi_k|\geqslant\dfrac{2}{3}\|x\|$，因此按照(10)，有 $x=|\eta^k_{m_k}|=1$. 因而，由于已经对任意选择的下标 n 证明了关系式(15)，对 $n=m_k$，得到 $|\eta_n|\geqslant\dfrac{2}{3}\|x\|-\dfrac{1}{2}\|x\|=\dfrac{1}{6}\|x\|$，因此有 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|\eta_n|\geqslant\dfrac{1}{6}\|x\|$. 取这个不等式和不等式(14)一起，建立了公式

(9).

现在与每个 $x=\{\xi_i\}$ 一起考虑由公式(8)定义的相应序列 $y=\{\eta_n\}$. 由(9)序列 y 有界, 且若令 $y=U(x)$, 则有

$$\frac{1}{6}\|x\|\leqslant\|U(x)\|\leqslant\frac{3}{2}\|x\|, \tag{16}$$

故 U 是有界线性算子.

但是, 对 $x_i=\{\xi_n^i\}$, 其中

$$\xi_n^i=\begin{cases}1, & \text{对 } i=n,\\ 0, & \text{对 } i\neq n,\end{cases}$$

由定义有 $y_i=U(x_i)$, 对 $i=1,2,\cdots$. 因此对 $x=\{\xi_i\}\in c_0$ 有 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i x_i$, 由算子 U 的连续性, 得 $y=U(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i U(x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i$. 因此, 最后这个级数收敛, 得到 $y\in G_0$.

反之, 设 $y\in G_0$, 由 G_0 的定义, 有 $y=\lim_{n\to\infty}s_n$, 其中 $s_n=\sum_{i=1}^{r_n}\alpha_i^n y_i$; 对 $t_n=\sum_{i=1}^{r_n}\alpha_i^n x_i$, 有 $t_n\in c_0$ 和 $U(t_n)=s_n$. 现在由(16), 得 $\frac{1}{6}\|t_p-t_q\|\leqslant\|U(t_p-t_q)\|=\|s_p-s_q\|=0$; 于是由等式 $\lim_{p,q\to\infty}\|s_p-s_q\|=0$ 得 $\lim_{p,q\to\infty}\|t_p-t_q\|=0$. 因而序列 $\{t_n\}$ 收敛. 令 $x=\lim_{n\to\infty}t_n$, 有 $x\in c_0$ 和 $U(x)=y$, 由此得知算子 U 是一对一的, 且它映 c_0 到整个 G_0.

所以空间 c_0 和 G_0 同构, 又由 $G_0\subseteq G$ 得 $\dim_l c_0\leqslant\dim_l G$, 由此得知, 由于 G 与 E 同构, c_0 与 c 同构, 故 $\dim_l c\leqslant\dim_l E$, 这与假设(3)矛盾. 因此 E 是有限维的, 证明完毕.

对 $l^p, p>1$ 的证明类似.

12.3　空间 L^p 和 $l^p(p>1)$ 的维数[①]

定理 2　每个弱收敛于 0 的函数序列 $\{x_i(t)\}\subseteq L^p$ 包含子序列 $\{x_{i_k}(t)\}$, 使得

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}x_{i_k}\right\|=\begin{cases}O(n^{\frac{1}{p}}), & \text{对 } 1<p\leqslant 2,\\ O(n^{\frac{1}{2}}), & \text{对 } p>2.\end{cases} \tag{17}$$

① 这一节的定理是我与 M. S. Mazur 合作发现的.

证明 要证明对 $p>1$ 有下面不等式:

$$|a+b|^p \leqslant |a|^p + p|a|^{p-1} b \cdot \operatorname{sign} a + A|b|^p + B\sum_{j=2}^{E(p)} |a|^{p-j}|b|^j \text{①}, \tag{18}$$

其中 a 和 b 是任意实数, A 和 B 是仅依赖于 p 的常数, $E(p)$ 表示 p 的整数部分. 因此当 $p \leqslant 2$ 时上面右端最后一项为零.

由归纳法定义序列 $\{x_{i_k}\}$, 设 $i_1=1$, 对 $n>1$, 令 i_n 是任意自然数, 满足

$$p\left|\int_0^1 |s_{n-1}(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} s_{n-1}(t) \cdot x_{i_n}(t)dt\right| \leqslant 1, \tag{19}$$

其中 $s_{n-1}(t)=\sum_{k=1}^{n-1} x_{i_k}(t)$, 这样的 i_n 存在. 由假设, 序列 $\{x_i(t)\}$ 弱收敛于 0 且 $|s_{n-1}(t)|^{p-1} \in L^q$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

令 $a=s_{n-1}(t)$ 和 $b=x_{i_n}(t)$, 积分不等式(18)得

$$\begin{aligned}\int_0^1 |s_n|^p dt \leqslant \int_0^1 |s_{n-1}|^p\, dt + p\int_0^1 |s_{n-1}|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} s_{n-1} \cdot x_{i_n} dt \\ + A\int_0^1 |x_{i_n}|^p\, dt + B\sum_{j=2}^{E(p)} \int_0^1 |x_{n-1}|^{p-j}|x_{i_n}|^j\, dt.\end{aligned} \tag{20}$$

由 9.1 节定理 1, 从序列 $\{x_n(t)\}$ 的弱收敛性得数列 $\{\|x_n\|\}$ 有界, 不失一般性, 可假设

$$\|x_n\| \leqslant 1, \quad \text{对 } n=1,2,\cdots. \tag{21}$$

现在对情形 $p>2$, 由(21)和 Riesz 不等式(见引言 A.2), 对 $2 \leqslant j \leqslant p$ 有

$$\int_0^1 |s_{n-1}|^{p-j}|x_{i_n}|^j\, dt \leqslant \left[\int_0^1 |s_{n-1}|^p\, dt\right]^{(p-j)/p} \leqslant 1+\left[\int_0^1 |s_{n-1}|^p\, dt\right]^{(p-2)/p},$$

因此由(19)和(20)有 $\|s_n\|^p \leqslant \|s_{n-1}\|^p + 1 + A + Bp(1+\|s_{n-1}\|^{p-2})$, 再由迭代, 得

$$\|s_n\|^p \leqslant C \cdot n + D\sum_{k=1}^{n-1} \|s_k\|^{p-2}, \tag{22}$$

---

① 这个不等式的证明见 S. Banach 和 S. Saks. Sur la convergence forte dans les champs L^p. Studia Mathematica II, 1930: 52.

其中 $C=1+A+Bp$ 以及 $D=Bp$.

令 $M=C+D+2$. 用归纳法证明

$$\|s_n\|\leqslant M\cdot n^{\frac{1}{2}},\quad 对\ n=1,2,\cdots. \tag{23}$$

事实上, 由 s_n 的定义和(21), 有 $\|s_1\|\leqslant 1$. 假设不等式(23)对下标小于某个给定的 n 成立, 则由(22)有

$$\begin{aligned}\|s_n\|^p&\leqslant D\cdot M^{p-2}\sum_{k=1}^{n-1}k^{(p-2)/2}+C\cdot n\leqslant D\cdot M^{p-2}\cdot n^{p/2}+C\cdot n\\&\leqslant M^p n^{p/2}(D\cdot M^{-2}+n^{1-p/2}C\cdot M^{-p}).\end{aligned}$$

因此得(23), 因为容易验证, 对 $p>2$ 括号中的和小于 1.

于是由(23), 对 $p>2$ 等式 $\|s_n\|=O(n^{\frac{1}{2}})$ 被建立.

现在讨论情形 $1<p\leqslant 2$. 由 s_n 的定义, 从(20)和(21)得到

$$\int_0^1|s_n|^p\,dt\leqslant\int_0^1|s_{n-1}|^p\,dt+1+A+B,$$

因此 $\|s_n\|^p\leqslant\|s_{n-1}\|^p+C$, 其中 $C=1+A+B$. 由此 $\|s_n\|^p\leqslant\|s_1\|^p+C(n-1)\leqslant C\cdot n$, 从而令 $M^p=C$, 得 $\|s_n\|\leqslant M\cdot n^{1/p}$, 因此在这情形得到等式 $\|s_n\|=O(n^{1/p})$, 证明完毕.

附注 对任何 $p>1$, 如果在关系式(17)中以符号 O 代替 o, 则上面的定理不再成立.

事实上, 对 $p\geqslant 2$, 令 $x_i(t)=\sin 2\pi it$, 由于对任何可积函数 $\alpha(t)$ 有

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^1\alpha(t)\sin 2\pi it dt=0,$$

因此序列 $\{x_i(t)\}\subseteq L^p$ 弱收敛. 令 $s_n(t)=\sum_{k=1}^{n}x_{i_k}(t)$, 其中 $\{x_{i_k}(t)\}$ 表示任意序列, 于是有

$$\|s_n(t)\|=\left(\int_0^1|s_n(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left(\int_0^1 s_n^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}},$$

这证明了 O 不可以用 o 代替.

对 $1<p\leqslant 2$, 令

$$x_i(t)=\begin{cases}2^{i/p}, & 对\ \dfrac{1}{2^i}\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2^{i-1}},\\ 0, & 对\ 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2^i}\ 和\ \dfrac{1}{2^{i-1}}<t\leqslant 1,\end{cases}$$

对任何子序列 $\{x_{i_k}(t)\}$ 有等式

$$\|s_n\|=\left(\int_0^1|s_n(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}=n^{\frac{1}{p}},$$

这证明了在后一情形用 o 代替 O 也是不可能的.

定理 3 l^p(其中 $p>1$)中每个弱收敛于 0 的元素序列 $\{x_i\}$ 包含子序列 $\{x_{i_k}\}$，且满足

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}x_{i_k}\right\|=O(n^{1/p}). \tag{24}$$

证明 设 $x_i=\{\xi_r^i\}$. 由 $\{x_i\}$ 弱收敛于 0 得知(见 9.2 节)

$$\lim_{i\to\infty}\xi_r^i=0,\quad 对\ i=1,2,\cdots, \tag{25}$$

以及

$$\|x_i\|\leqslant M,\quad 对\ i=1,2,\cdots. \tag{26}$$

递归地定义序列 $\{x_{i_k}\}$ 如下：$x_{i_1}=x_1$，对 $n>1$，x_{i_n} 为满足下面不等式的序列 $\{x_i\}$ 的任意项，有

$$\sum_{j=1}^{N}|\xi_j+\xi_j^{i_n}|^p\leqslant\sum_{j=1}^{N}|\xi_j|^p+1, \tag{27}$$

其中 $\{\xi_j\}=s_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}x_{i_k}$，$N$ 表示满足

$$\sum_{j=N}^{\infty}|\xi_j|^p\leqslant 1 \tag{28}$$

的自然数.

由于(25)，这样的 x_{i_n} 存在，由定义有

$$\| s_n \|^p = \| s_{n-1} + x_{i_n} \|^p = \sum_{j=1}^{N} | \xi_j - \xi_j^{i_n} |^p + \sum_{j=N}^{\infty} | \xi_j + \xi_j^{i_n} |^p ,$$

因此, 由(27)和 Hölder 不等式得

$$\| s_n \|^p \leqslant \sum_{j=1}^{N} | \xi_j |^p + 1 + \left[\left(\sum_{j=N}^{\infty} | \xi_j |^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=N}^{\infty} | \xi_j^{i_n} |^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p ,$$

从而由(26)和(28)得 $\| s_n \|^p \leqslant \| s_{n-1} \|^p + 1 + (1+M)^p = \| s_{n-1} \|^p + C$, 其中 $C = 1 + (1+M)^p$. 由此得知 $\| s_n \|^p \leqslant C \cdot n$, 从而由 s_n 的定义得等式(24), 证明完毕.

附注 对每个 $p > 1$, 如果公式(24)中以 o 代替 O, 那么 12.3 节定理 3 就不再成立. 事实上, 只需令

$$\xi_r^i = \begin{cases} 1, & 对\ i = r, \\ 0, & 对\ i \neq r, \end{cases}$$

对任何子序列 $\{x_{i_k}\}$ 有 $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_{i_k} \right\| = n^{1/p}$.

从刚才证明的 12.3 节定理 2 和定理 3 来推导几个关系式. 首先是空间 L^p 和 L^q 的线性维数之间的关系式, 然后是空间 l^p 和 l^q 的线性维数之间的关系式, 最后是空间 L^p 和 l^q 的线性维数之间的关系式, 这里的 $p,q > 1$.

引理 假设 $\dim_l L^p \leqslant \dim_l L^q$, 其中 $p,q > 1$, 则 $q \leqslant p \leqslant 2$, 或 $2 \leqslant p \leqslant q$.

证明 由假设, 存在有界线性泛函 U, 它将 L^p 单射映为 L^q 的闭子空间 G. 如果序列 $\{x_n\} \subseteq L^p$ 弱收敛于 Θ, 则对序列 $\{y_n\}$ 也同样成立, 其中 $y_n = U(x_n)$. 于是由 12.3 定理 2, 存在子序列 $\{y_{i_n}\}$ 使得

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} y_{i_k} \right\| = O(n^{\varphi(q)}), \quad 其中\ \ \varphi(q) = \begin{cases} 1/q, & 对\ 1 < q \leqslant 2, \\ 1/2, & 对\ q \geqslant 2. \end{cases} \tag{29}$$

由于逆算子 U^{-1} 连续, 存在 $M > 0$ 使得 $\| x \| \leqslant M \| y \|$, 其中对每个 $y \in G$, $x = U^{-1}(y)$, 因此 $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| \leqslant M \left\| \sum_{k=1}^{n} y_{i_k} \right\|$, 因而由(29), 有 $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = O(n^{\varphi(q)})$, 故 $\{x_i\}$ 是弱收敛于 Θ 的任何序列, 从而由(29)得

$$\varphi(p) \leqslant \varphi(q). \tag{30}$$

现在由于 L^p 和 L^q 上的有界线性泛函空间分别与 $L^{p/(p-1)}$ 和 $L^{q/(q-1)}$ 等距(见 11.6 节②)，又有伴随算子 U^* 映 $L^{q/(q-1)}$ 到 $L^{p/(p-1)}$，由此从 10.1 节定理 3 得知它的值域是整个空间 $L^{p/(p-1)}$. 从而由 10.1 节定理 10，存在 $m>0$，使得对每个 $X \in L^{p/(p-1)}$，存在对应的 $Y \in L^{q/(q-1)}$，使得 $X = U^*(Y)$ 和 $\|Y\| \leqslant m\|X\|$.

这就是说，设 $\{X_n\}$ 是 $L^{p/(p-1)}$ 元素的任一弱收敛于 0 的序列，$\{Y_n\}$ 是对每个自然数 n 满足条件 $X_n = U^*(Y_n)$ 和 $\|Y_n\| \leqslant m\|X_n\|$ 的序列. 由于范数序列 $\{\|Y_n\|\}$ 有界，$\{Y_n\}$ 有弱收敛的子序列 $\{Y_{n_i}\}$ (见 8.7 节)，设 Y_0 表示这个子序列的极限，则有 $U^*(Y_0)=0$，因为序列 $\{X_{n_i}\}$ 弱收敛于 0. 因此有 $X_{n_i} = U^*(Y_{n_i} - Y_0)$，此外序列 $\{Y_{n_i} - Y_0\}$ 弱收敛于 0. 令 $Y_i = Y_{n_i} - Y_0$，$i = 1,2,\cdots$，由 12.3 节定理 2，可选取子序列 $\{Y_{i_k}\}$ 使得

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} Y_{i_k}\right\| = O\left(n^{\varphi\left(\frac{q}{q-1}\right)}\right), \tag{31}$$

因此，若令 $X_{i_k} = U^*(Y_{i_k})$，得到 $\|X_{i_k}\| \leqslant \|U^*\| \cdot \|Y_{i_k}\|$ 以及

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} X_{i_k}\right\| = O\left(n^{\varphi\left(\frac{q}{q-1}\right)}\right). \tag{32}$$

由于 $\{X_{i_k}\}$ 是 $\{X_n\}$ 的子序列，由(31)和(32)以及 12.3 节附注得到

$$\varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) \leqslant \varphi\left(\frac{q}{q-1}\right), \tag{33}$$

因而由(30)和函数 φ 的定义，不难得到期望的不等式.

由此引理容易得到下面的定理.

定理 4　如果 $\dim_l L^p = \dim_l L^q$，其中 $p,q>1$，那么有 $p=q$.

定理 5　如果 $1<p<2<q$，那么空间 L^p 和 L^q 的线性维数是不可比较的.

定理 6　如果 $1<p\neq 2$，那么有 $\dim_l L^2 < \dim_l L^p$.

证明　对 $x(t) \in L^2$，令

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i \cos 2^i t + b_i \sin 2^i t), \tag{34}$$

其中 $a_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos itdt$ 和 $b_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin itdt$，对任何 $i = 0,1,2,\cdots$.

由于$\sum_{i=0}^{\infty}(a_i^2+b_i^2)=\int_0^{2\pi}x^2(t)dt$，故存在①仅依赖于$p$的常数$M>0$，使得

$$\left[\int_0^{2\pi}|y(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant M\left[\sum_{i=0}^{\infty}(a_i^2+b_i^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

令$y=U(x)$，于是有$y\in L^p$，又上面的不等式可以写为形式

$$\|y\|\leqslant M\|x\|,$$

由此得知U是有界线性算子.

此外，存在②常数K使得

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty}(a_i^2+b_i^2)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant K\int_0^{2\pi}|y(t)|dt,$$

从而，由 Riesz 不等式(见引言 A.2)得：

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty}(a_i^2+b_i^2)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant K(2\pi)^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^{2\pi}|y(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

故$\|x\|\leqslant C\|y\|$，其中$C=K(2\pi)^{1/p}$，由此得知U有连续逆.

因此，有关系

$$\dim_l(L^2)\leqslant\dim_l(L^p),$$

其中等号除外(因为如果这样，由 12.3 节定理 4 得等式$p=2$，与假设矛盾)，证明完毕.

注意，下面一个问题还没有被解决：对$q<p<2$，是否如$2<p<q$那样，总有$\dim_l L^p<\dim_l l^p$？

对空间l^p和l^q有

定理 7　对空间l^p和l^q，其中$1<p\neq q>1$，它们的线性维数是不可比较的.

证明　设$\dim_l l^p\leqslant\dim_l l^q$，如上面引理的证明过程，得到不等式(它对应于公

---

① 根据 M. A. Zygmund (见 Sur les series trigonométriques lacunaires. Proceed. London. Math. Soc, 1930, 5: 138-145)的一个定理.

② 见 S. Banach. Lakunare trigonometrische Reihen. Studia Mathmatica II, 1930: 212.

式(30)和(33))

$$\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{q} \quad 和 \quad \frac{p-1}{p} \leqslant \frac{q-1}{q},$$

因此 $p=q$，与假设矛盾.

现在讨论 L^p 和 l^q 的线性维数之间的关系.

定理 8　假设 $\dim_l L^p \leqslant \dim_l l^q$，其中 $p,q>1$，则有 $p=q=2$.

证明　由相同过程得到(代替(30)和(33))：

$$\varphi(p) \leqslant \frac{1}{q} \quad 和 \quad \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) \leqslant \frac{q-1}{q},$$

其中

$$\varphi(n)=\begin{cases} \dfrac{1}{n}, & 对\ n \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{2}, & 对\ n \geqslant 2. \end{cases} \tag{35}$$

由此立刻得到 $p=q=2$，证明完毕.

由 12.3 节定理 8 和 11.2 节定理 1 得

推论　$\dim_l L^p = \dim_l l^q$ 的充分必要条件是 $p=q=2$.

定理 9　如果 $1<p\neq 2$，则有 $\dim_l L^p > \dim_l l^p$.

证明　事实上，如果定理不成立，则有 $\dim_l L^p \leqslant \dim_l l^p$，由 12.3 节定理 8，令 $p=q$，得等式 $p=2$，与假设矛盾.

因此剩下要证明的问题中，空间是可比较线性维数的. 为此令

$$y_i(t)=\begin{cases} 2^{i/p}, & 对 \dfrac{1}{2^i}<t\leqslant \dfrac{1}{2^{i-1}}, \\ 0, & 对\ 0\leqslant t<\dfrac{1}{2^i}\ 和\ \dfrac{1}{2^{i-1}}<t\leqslant 1, \end{cases}$$

因此 $\int_0^1 |y_i(t)|^p\,dt=1$，故 $y_i(t)\in L^p$，$i=1,2,\cdots$. 对每个 $x=\{\xi_i\}\in l^p$，设

$$y(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i y_i(t),$$

由此 $\int_0^1 |y_i(t)|^p dt=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p$. 令 $y=U(x)$，得到 $\|y\|=\|x\|$，这证明了 U 是有界线性

算子，它允许有连续逆. 此外，它将空间 l^p 同构映为 L^p 的子空间.

定理 10 对 $1<q<p<2$，如同 $2<p<q$，空间 L^p 和 l^q 是不可比较线性维数的.

证明 假设 $\dim_l L^p \geqslant \dim_l l^q$，由 12.3 节引理证明的论述，得知不等式(类似于(30)和(34))：

$$\frac{1}{q}\leqslant\varphi(p) \text{ 和 } \frac{q-1}{q}\leqslant\varphi\left(\frac{p}{p-1}\right),$$

其中函数 φ 由公式(35)定义. 由此立刻得知 $p\leqslant q\leqslant 2$ 或 $2\leqslant q\leqslant p$，与假设矛盾.

但是下面的问题仍未解决：由 $p<q<2$，或者同样由 $2<q<p$，是否能得到不等式 $\dim_l L^p > \dim_l l^q$？

附录　Banach 空间中的弱收敛性

我们区别 Banach 空间中的两种弱收敛概念，即有界线性泛函的弱收敛与元素的弱收敛(见 8.4 节和 9.1 节). 这两种概念明显是不同的. 这里加入几个与这些概念研究有关的定理.

1　有界线性泛函集的弱导集

给定一个可分的 Banach 空间 E，设 Γ 是定义在 E 上的有界线性泛函的任意集.

称有界线性泛函 X 为集合 Γ 的弱聚点，如果存在弱收敛于泛函 X 的有界线性泛函序列 $\{X_k\}$，其中对每个 $k=1,2,\cdots$，$X_k \neq X$ 和 $X_k \in \Gamma$.

集合 Γ 的所有弱聚点的集合称为 Γ 的(一阶)导集. Γ 的 $n-1$ 阶导集的导集称为 Γ 的 n 阶导集. Γ 相继的导集记为 $\Gamma_{(1)}$, $\Gamma_{(2)},\cdots$, $\Gamma_{(n)},\cdots$.

如果 Γ 是线性集，显然有

$$\Gamma \subseteq \Gamma_{(1)} \subseteq \Gamma_{(2)} \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_{(n)} \subseteq \Gamma_{(n+1)} \subseteq \cdots,$$

容易给出线性集是闭的但不是弱闭的例子.

事实上，取 Γ 为定义在空间 c_0[①]上形如

$$X(x)=\sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i \text{[②]} \tag{1}$$

的有界线性泛函 X 的集合，其中 $x=\{\xi_i\}\in c_0, C_1=\sum_{i=2}^{\infty} C_i$.

容易看出这样定义的集合 Γ 是线性闭的，但它不包含形如(1)的泛函，其中 $C_1=1$，以及 $C_i=0$, $i=2,3,\cdots$. 此外，由于最后的泛函(见 8.6 节附注)是形如(1)的泛函序列 $\{X_k\}$ 的弱极限，其中

---

① 收敛于 0 的实数序列的空间(参看 11.6 节).

② 参看 4.4 节.

$$C_i = \begin{cases} 1, & \text{对 } i=1 \text{ 或 } i=k, \\ 0, & \text{对 } i \neq 1 \text{ 或 } i \neq k, \end{cases}$$

故集合Γ不是弱闭的.

定理 1 对每个自然数n，存在定义在空间c_0上的有界线性泛函的线性集，它的n阶弱导集不是弱闭的[①].

证明 定义在c_0上的每个有界线性泛函X都有形式(1)，其中$x=\{\xi_i\}\in c_0$和$\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|=\|X\|$，设$\Delta_1$是其中有$C_{2i}=0$的集合，$\Delta_2$是使得$C_{2i-1}=0$, $i=1,2,\cdots$的集合.

在自然数对r,s与偶数$N(r,s)$之间建立一一对应，并以$Z_{r,s}$记c_0上的有界线性泛函，它由$Z_{r,s}(x)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\xi_i$给出，其中$x=\{\xi_i\}\in c_0$以及

$$C_i = \begin{cases} 1, & \text{对 } i=N(r,s), \\ 0, & \text{对 } i\neq N(r,s). \end{cases} \tag{2}$$

设G是定义在c_0上的有界线性泛函的任意线性集. 又设H是形如(1)的所有泛函的集合，其中$C_{2i}=0$, $i=1,2,\cdots$，且使得泛函$\sum_{i=1}^{\infty}C_{2i-1}\xi_i$属于$G$. 这样定义的集合$H$显然是线性的且有$H\subseteq\Delta_1$. l^1的子空间，集合Δ_1是可分的. 因此H包含泛函序列$\{Y_r\}$，它在属于H并满足

$$\|Y_r\|\leqslant 1, \quad \text{对 } r=1,2,\cdots \tag{3}$$

的范数$\leqslant 1$的有界线性泛函的集合中稠.

对自然数r,s，令

$$X_{r,s}=Y_r+rZ_{r,s}, \tag{4}$$

并设Γ表示形如

$$X=\sum_{r,s=1}^{\infty}a_{r,s}X_{r,s}=\sum_{r=1}^{\infty}Y_r\sum_{s=1}^{\infty}a_{r,s}+\sum_{r,s=1}^{\infty}ra_{r,s}Z_{r,s} \tag{5}$$

---

① 第一个有界线性泛函的线性集的导集不是弱闭的例子是 M.S. Mazurkiewicz 给出的 (Sur la dérivée faible d'un ensemble de fonctionnelles linéaires. Studia Mathematica II, 1930：68-71).

的泛函 X 的线性集，其中至多有有限多个 $a_{r,s}$ 不为零.

因此由(4)和(5)以及 Δ_1 和 Δ_2 的定义，有

$$\left\|\sum_{r,s=1}^{\infty} a_{r,s}X_{r,s}\right\| \geqslant \left\|\sum_{r,s=1}^{\infty} ra_{r,s}Z_{r,s}\right\| = \sum_{r,s=1}^{\infty} |ra_{r,s}|. \tag{6}$$

现在设 $\{X_k\}$ 是弱收敛于 X 的序列，其中 $X_k \in \Gamma$，对 $k=1,2,\cdots$. 由(5)可以令

$$X_k = \sum_{r,s=1}^{\infty} a_{r,s}^{(k)} X_{r,s} = X'_k + X''_k, \tag{7}$$

其中

$$X'_k = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^{(k)} \quad 和 \quad X''_k = \sum_{r,s=1}^{\infty} ra_{r,s}^{(k)} Z_{r,s}. \tag{8}$$

显然，对任何 k 有 $X'_k \in \Delta_1$ 和 $X''_k \in \Delta_2$，由此得知序列 $\{X'_k\}$ 和 $\{X''_k\}$ 分别弱收敛于某泛函 $X' \in \Delta_1$ 和 $X'' \in \Delta_2$，因此 $X = X' + X''$.

一般，以 H' 表示集合 H 在通常意义下的导集，进一步证明

$$X' \in H'. \tag{9}$$

事实上，由于序列 $\{X_k\}$ 弱收敛于 X，存在数 $M>0$，使得对 $k=1,2,\cdots$，有 $\|X_k\| \leqslant M$，因此，由(6)~(8)有 $\sum_{r,s=1}^{\infty} |ra_{r,s}^{(k)}| \leqslant M$；由此，若令 $b_r^{(k)} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^{(k)}$，则可得

$$\sum_{r,s=1}^{\infty} |rb_r^{(k)}| \leqslant M, \quad 对 \ k=1,2,\cdots. \tag{10}$$

因此存在指标的子序列 $\{k_j\}$，使得对每个 $r=1,2,\cdots$，极限 $b_r = \lim_{j\to\infty} b_r^{(k_j)}$ 存在.

从而由(10)有

$$\sum_{r=1}^{\infty} r|b_r| \leqslant M. \tag{11}$$

因而对每个自然数 m，有

$$\sum_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| \leqslant \sum_{r=1}^{m-1} |b_r^{(k_j)} - b_r| + \sum_{r=m}^{\infty} |b_r^{(k_j)}| + \sum_{r=m}^{\infty} |b_r|,$$

由此，以及由(11)和 b_r 的定义立刻得到

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\sum_{r=1}^{\infty}|b_r^{(k_j)}-b_r|\leqslant 2M/m,$$

由于 m 是任意的，得

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{r=1}^{\infty}|b_r^{(k_j)}-b_r|=0.$$

注意到由(3)和(11)级数 $\sum_{r=1}^{\infty}b_rY_r$ 收敛，以及由上面的等式和(8)得知 X' 是它的和. 由于对每个自然数 r 有 $Y_r\in H$，又 H 是线性集，所以有 $X'\in H'$.

因而对 $X=X'+X''\in\Gamma_{(1)}$，其中 $X'\in\Delta_1$ 和 $X''\in\Delta_2$，这证明了 $X'\in H'$. 于是建立了公式(9).

此外，容易证明，当 $s\to\infty$ 时，序列 $\{Z_{r,s}\}$ 弱收敛于 Θ，因此由(4)，当 $s\to\infty$ 时，序列 $\{X_{r,s}\}$ 弱收敛于 Y_r. 因而有

$$Y_r\subseteq\Gamma_{(1)},\quad 对\ r=1,2,\cdots. \tag{12}$$

现在设 $\{X_k\}\subseteq\Gamma_{(1)}$ 是弱收敛于 $X\in\Delta_1\cap\Gamma_{(2)}$ 的序列. 显然有 $X_k=X_k'+X_k''$，其中 $X_k'\in H'$ 和 $X_k''\in\Delta_2$. 容易看出序列 $\{X_k\}$ 弱收敛于 X，因此 $X\in H_{(1)}$. 反之，对每个 $X\in H_{(1)}$，存在序列 $\{X_k\}\subseteq H$ 弱收敛于 X. 不失一般性，可以假设 $\|X_k\|\leqslant 1$，对 $k=1,2,\cdots$. 由序列 $\{Y_r\}$ 的定义，对每个 k，存在指标 r_k 使得 $\|X_k-Y_{r_k}\|\leqslant 1/k$，由此得知序列 $\{Y_{r_k}\}$ 也弱收敛于 X. 由此和(12)得知 $X\in\Gamma_{(2)}$，故 $X\in\Delta_1\cap\Gamma_{(2)}$，因为由 Δ_1 的定义，$H_{(1)}\subseteq\Delta_1$.

因此

$$\Delta_1\cap\Gamma_{(2)}=H_1. \tag{13}$$

继续这个过程，由归纳法一般有

$$\Delta_1\cap\Gamma_{(n+1)}=H_{(n)},\quad 对每个\ n=1,2,\cdots. \tag{14}$$

现在回到给定的集合 G. 如果假定 G 的导集 G' 不是弱闭的，则 H 的导集 H' 显然也不是弱闭的，并且由(9)和(13)对 Γ 的弱导集 $\Gamma_{(1)}$ 这同样也成立. 类似地，假设 G 的 $n-1$ 阶弱导集 $G_{(n-1)}$ 不是弱闭的，则 H 的 n 阶弱导集 $H_{(n)}$ 显然也不是弱闭

的，因此由(14)，Γ 的 $n+1$ 阶弱导集 $\Gamma_{(n+1)}$ 也是. 证明完毕.

附注 可以令 $\Gamma(\xi)=\bigcup_{\eta<\xi}\Gamma_{(\eta)}$ 或者 $\Gamma_{(\xi)}=(\Gamma_{(\xi-1)})_{(1)}$，按照 ξ 是否是极限序数，对第二类超限数 ξ 定义 Γ 的超限 ξ 阶弱导集 $\Gamma_{(\xi)}$.

于是可以由归纳法建立下面的定理，它类似于定理 1：

对每个第二类超限数 ξ，存在空间 c_0 上有界线性泛函的线性集，它的 ξ 阶弱导集不是弱闭的①.

但是，可以证明，如果 E 是可分的 Banach 空间，Γ 是 E 上有界线性泛函的任意集，则总存在有限或第二类超限数 ξ，使得集合 $\Gamma_{(\xi)}$ 是弱闭的. 这是 8.5 节定理 4 的简单推论.

定理 2 设 E 是一个可分的 Banach 空间，Γ 是 E 的对偶空间 E^* 的线性子空间. $\Gamma_{(1)}=E^*$ 的充分必要条件是：存在数 $M>0$，使得对每个 $x\in E$，Γ 包含满足条件

$$\|X\|\leqslant M \quad 和 \quad |X(x)|=\|x\| \tag{15}$$

的泛函 X.

证明 必要性. 对每个自然数 n，设 Δ_n 是 E 上有界线性泛函 X 的集合，X 是包含在 Γ 内满足不等式 $\|X_k\|\leqslant n, k=1,2,\cdots$ 的序列 $\{X_k\}$ 的弱极限. 因此由 8.4 节定理 2 有 $\Gamma_{(1)}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n$，从而由假设，

$$E^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n. \tag{16}$$

注意到 Δ_n 是闭集. 事实上，设 $\{X_j\}\subseteq\Delta_n$ 是满足 $\lim_{j\to\infty}\|X_j-X\|=0$ 的序列. 由 Δ_n 的定义，对每个 j，存在弱收敛于 X_j 的序列 $\{X_k^j\}$，其中对 $k=1,2,\cdots$，有 $X_k^j\in\Gamma$ 和 $\|X_k^j\|\leqslant n$. 如果 $\{x_r\}$ 是 E 中的稠序列，则对任何 j 和 r，等式 $\lim_{k\to\infty}X_k^j(x_r)=X_j(x_r)$ 和 $\lim_{j\to\infty}X_j(x_r)=X(x_r)$ 的成立导致对每个 $r=1,2,\cdots$，存在序列 $\{X_{k_j}^j\}$ 满足 $\lim_{j\to\infty}X_{k_j}^j(x_r)=X(x_r)$. 因为 $\|X_{k_j}^j\|\leqslant n$，由 8.4 节定理 2 得知序列 $\{X_{k_j}^j\}$ 弱收敛于 X，由此得 $X\in\Delta_n$.

因此，由于每个 Δ_n 是闭的，且 E^* 本身是 Banach 空间，由等式(6)得知存在指

① 见 S. Banach. Sur le derive faible des ensemble de fonctionnelles lineaires. Studia Mathematica IV(待发表).

标 n_0，使得 Δ_{n_0} 包含球 $K \subseteq E^*$. 设 X' 表示 K 的中心，ρ 为它的半径.

给定元素 $x \in E$，由 4.2 节定理 3，存在泛函 $X_0 \in E^*$，使得

$$X_0(x) = \| x \| \quad 和 \quad \| X_0 \| = 1. \tag{17}$$

令

$$\lambda = \frac{\rho}{1 + \| X' \|} \quad 和 \quad X'' = \lambda X_0 + (1 - \lambda) X'. \tag{18}$$

容易得知 $\| X'' - X' \| \leqslant \rho$，因此 $X'' \in K \subseteq \Delta_{n_0}$. 由此，存在属于 Γ 且分别弱收敛于 X' 和 X'' 的两个泛函序列 $\{X'_k\}$ 和 $\{X''_k\}$，于是有

$$\| X'_k \| \leqslant n_0 \quad 和 \quad \| X''_k \| \leqslant n_0, \quad 对\ k = 1, 2, \cdots. \tag{19}$$

序列 $\left\{ \frac{1}{\lambda} X''_k - \frac{(1-\lambda)}{\lambda} X'_k \right\}$ 包含在 Γ 内，且由(18)它弱收敛于 X_0. 因此由(17)，存在指标 k_0，使得

$$\frac{1}{\lambda} X''_{k_0}(x) - \frac{(1-\lambda)}{\lambda} X'_{k_0}(x) = \alpha \| x \|, \quad 其中\ \frac{1}{2} < \alpha < 2. \tag{20}$$

因而，若令 $X = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\lambda} X''_{k_0} - \frac{(1-\lambda)}{\lambda} X'_{k_0} \right)$，得到 $X \in \Gamma, X(x) = \| x \|$，以及由(18)~(20)得 $\| X \| \leqslant M = \frac{2n_0}{\rho}(2 + 2\| X' \| + \rho)$，故 M 与 x 无关. 因此条件(15)满足.

充分性. 设 Δ 表示集合 $\{X : X \in \Gamma\ 和\ \| X \| \leqslant 1\}$. 于是，由 8.5 节定理 4，以 Δ 代替 Γ 以及以 $\{X_r\}$ 代替 Δ，则存在序列 $\{X_r\} \subseteq \Delta$ 在 Δ 内弱稠. 对每个 $x \in E$，令

$$y = \{\eta_r\}, \quad 其中\ \eta_r = X_r(x), \quad 对\ r = 1, 2, \cdots. \tag{21}$$

从而有

$$| \eta_r | \leqslant \| X_r \| \cdot \| x \| \leqslant \| x \|, \tag{22}$$

因此 $y \in m$ 且

$$\| y \| \leqslant \| x \|, \tag{23}$$

其中 y 的范数是空间 m 的范数.

此外，用 $X\in\Gamma$ 表示泛函，由假设它满足条件(15). 若令 $X'=\frac{1}{M}X$，则 $\|X'\|\leqslant 1$，故 $X'\in\Delta$.

因此存在子序列 $\{X_{r_j}\}$ 弱收敛于 X'，故 $\lim\limits_{j\to\infty}|X_{r_j}(x)|=|X'(x)|$. 由此以及(15)和(21)得 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}|\eta_r|\geqslant|X'(x)|\geqslant\frac{1}{M}\|x\|$，因此

$$\|y\|\geqslant\frac{1}{M}\|x\|. \tag{24}$$

从而，若令 $y=U(x)$，则容易看出由(21)和(23)得知 U 是有界线性算子，逆算子 U^{-1} 也是有界线性算子. 由于由假设，空间 E 是可分的，且因 U 连续，故 U 的值域 E_1 也可分.

这就是说，如果 X 是 E 上任何有界线性泛函，并令

$$Y(y)=X[U^{-1}(y)], \tag{25}$$

则逆 U^{-1} 是有界线性算子，Y 是 E_1 上的有界线性泛函. 由 4.4 节 S. Mazur 定理，用 $\{\eta_r\}$ 代替在那里的 $\{\xi_j\}$，则存在二重数列 $\{\alpha_{nr}\}$，使得

$$Y(y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{nr}\eta_r,\quad 对\ y\in E_1, \tag{26}$$

以及对 $r>k_n$ 有 $\alpha_{nr}=0$，其中 $\{k_n\}$ 是自然数序列. 由(21),

$$\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{nr}\eta_r=\sum_{r=1}^{k_n}\alpha_{nr}\eta_r=\sum_{r=1}^{k_n}\alpha_{nr}X_r(x)=\overline{X}_n(x), \tag{27}$$

由此得知对 $n=1,2,\cdots$，有 $\overline{X}_n\in\Gamma$，因为 Γ 是线性集而 $X_r\in\Delta\subseteq\Gamma$.

此外，由(26)和(27)有 $Y[U(x)]=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{X}_n(x)$，因此由(25)，对每个 $x\in E$ 有 $X(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{X}_n(x)$；从而序列 $\{\overline{X}_n\}$ 弱收敛于 X，所以 $X\in\Gamma_{(1)}$，这证明了条件事实上是充分的，证明完毕.

容易看到，定义在任何距离空间 Q 上的所有有界连续实值函数 $x(q)$ 的集合组成一个 Banach 空间，倘若其中的加法和数量乘法按通常方式(逐点)定义，范数由

$$\|x\|=\sup_{q\in Q}|x(q)| \tag{28}$$

给出.

进一步若空间 Q 紧，则问题中的空间 E 是可分的.

按照这种情形(Q 为紧)，有下面的

定理 3　设 $\{q_r\}$ 表示 Q 中稠点列，则对每个定义在 E 上的有界线性泛函 X，存在实数二重序列 $\{\alpha_{ir}\}$ 和自然数数列 $\{k_n\}$，使得

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{r=1}^{k_i}\alpha_{ir}x(q_r)=X(x),\quad 对\ x\in E.$$

证明由上面定理 2 得知，因为在这些条件下，形如 $\sum_{i=1}^{m}a_i x(q_i)$ 的有界线性泛函集 Γ 满足定理 2 的条件，其中 a_i 是实数，m 是任意一个自然数.

事实上，对每个 $x\in E$，存在 $q_0\in Q$，使得 $x(q_0)\geqslant\frac{1}{2}\max_{q\in Q}|x(q)|=\frac{1}{2}\|x\|$ ，且只要令 $M=2$，$X_0(x)=x(q_0)$ 就是范数为 1 的有界线性泛函，

定理 3 也可容易直接应用 4.4 节 S. Mazur 定理证明.

2　元素的弱收敛性

现在设 Q 是一般的抽象集合，不必要是距离空间，E 是定义在 Q 上的所有有界实值函数 $x(q)$ 的 Banach 空间，以(28)为其范数.

定义在 E 上的泛函 X 称为非负的，如果对任何函数 $x\in E$ 与每个 $q\in Q$，由条件 $x(q)\geqslant 0$，得 $X(x)\geqslant 0$.

定理 4　每个定义在 E 上的有界线性泛函 X 是 E 上两个非负有界线性泛函之差.

证明　对 Q 的每个子集 S，令

$$\mu(S)=\sup_{T\subseteq S}X(\varphi_T),\tag{29}$$

其中 φ_T 表示集 T 的特征函数. 于是有

$$0\leqslant\mu(S)\leqslant\|X\|,\tag{30}$$

且对不相交的集合 S_1 和 S_2 有 $\mu(S_1\cup S_2)=\mu(S_1)+\mu(S_2)$.

进一步由(29)，有

$$X(\varphi_S)\leqslant\mu(S),\tag{31}$$

对每个满足 $\|x\|=1$ 的函数 $x\in E$，令

$$x_n(q)=\frac{i}{n},\quad \text{对}\ \frac{i}{n}\leqslant x(q)<\frac{i+1}{n},\quad \text{其中}-n\leqslant i\leqslant n. \tag{32}$$

显然对每个 $q\in Q$ 有 $|x_n(q)-x(q)|\leqslant 1/n$，故 $\|x_n-x\|\leqslant 1/n$，从而有

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n. \tag{33}$$

用 $S_{i,n}$ 表示集合 $\{q\in Q: x_n(q)=i/n\}$，其中 $-n\leqslant i\leqslant n$，令

$$X'(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=-n}^{n}\frac{i}{n}\mu(S_{i,n}). \tag{34}$$

容易证明由(33)，极限(34)存在，以及由(30)得 $|X'(x)|\leqslant\|X\|$.

因为现在泛函 X' 是非负的，假设

$$x(q)\geqslant 0,\quad \text{对每个}\ q\in Q, \tag{35}$$

则由(30)和(34)，得不等式

$$X'(x)\geqslant 0. \tag{36}$$

此外，注意到由(32)得

$$x_n(q)=\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}\varphi S_{i,n}(q),$$

故由(31)得

$$X(x_n)\leqslant\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}\mu(S_{i,n}),$$

从而由(33)和(34)有

$$X(x)\leqslant X'(x), \tag{37}$$

由此得知泛函

$$X''=X'-X \tag{38}$$

也是非负的，因为由(37)，当条件(35)满足时，总有不等式 $X''(x)\geqslant 0$．最后，由(38)有 $X=X'-X''$.

定理 5　范数有界的函数序列 $\{x_n\}\subseteq E$ 弱收敛于 Θ 的充分必要条件是：对每

个点列 $\{q_i\}\subseteq Q$，有

$$\lim_{n\to\infty}\varliminf_{i\to\infty}|x_n(q_i)|=0. \tag{39}$$

证明　*必要性*. 假设相反，对某个序列 $\{q_i\}\subseteq Q$ 有 $\varlimsup_{n\to\infty}\varliminf_{i\to\infty}|x_n(q_i)|>\alpha>0$，则存在自然数的递增序列 $\{n_k\}$，使得对每个 k 有 $\varliminf_{i\to\infty}|x_{n_k}(q_i)|>\alpha>0$，因而可以用对角线法则选取 $\{q_i\}$ 的子序列 $\{q_{i_j}\}$，使得

$$\left|\lim_{j\to\infty}x_{n_k}(q_{i_j})\right|>\alpha>0,\quad 对\ k=1,2,\cdots. \tag{40}$$

考虑由公式

$$X(x)=\operatorname*{Lim}_{j\to\infty}x(q_{i_j}),\quad 对每个\ x\in E$$

定义的有界线性泛函 X，其中符号 Lim 由 2.3 节定义. 于是由(40)，对 $k=1,2,\cdots$，有 $|X(x_{n_k})|>\alpha$，从而

$$\varlimsup_{n\to\infty}|X(x_n)|>\alpha>0, \tag{41}$$

由此得知序列 $\{x_n\}$ 不可能弱收敛于 Θ.

充分性. 为了证明函数序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 Θ，其中对 $n=1,2,\cdots$，有 $\|x_n\|<M$，反之，现在只需证明不存在非负有界线性泛函 X 满足不等式(41).

假设论断不成立；设存在泛函 X，显然可以假设

$$\|X\|=1\ \ 和\ \ \varlimsup_{n\to\infty}X(x_n)>\alpha>0. \tag{42}$$

对每个 $q\in Q$，令

$$s_n(q)=\begin{cases}x_n(q), & 若\ x_n(q)\geqslant 0,\\ 0, & 若\ x_n(q)<0,\end{cases}$$

和

$$t_n(q)=x_n(q)-s_n(q).$$

显然 $\varlimsup_{n\to\infty}X(s_n)$ 和 $\varlimsup_{n\to\infty}X(t_n)$ 中至少有一个必须超过 $\frac{\alpha}{2}$. 假设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} X(s_n) > \frac{\alpha}{2} > 0. \tag{43}$$

于是对每个$q \in Q$，若令

$$y_n(q) = \begin{cases} s_n(q), & 如果\ s_n(q) \geqslant \frac{\alpha}{6}, \\ 0, & 如果\ s_n(q) < \frac{\alpha}{6}, \end{cases}$$

则$\| s_n - y_n \| \leqslant \frac{\alpha}{6}$，因此由(42)和(43)得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} X(y_n) > \frac{\alpha}{3} > 0. \tag{44}$$

设S_n表示Q的子集$\{q \in Q : | x_n(q) | \geqslant \frac{\alpha}{6}\}$，$\varphi_n$是它的特征函数. 由于$\| y_n \| \leqslant \| s_n \| \leqslant \| x_n \| < M$，对每个$q \in Q$和$n = 1,2\cdots$，有$\varphi_n(q) \geqslant \frac{1}{M} y_n(q)$，故由于泛函$X$是非负的，有$X(M \cdot \varphi_n) \geqslant X(y_n)$，因此由(44)，令$\beta = \alpha / 3M$则得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} X(\varphi_n) > \beta > 0. \tag{45}$$

对Q的子集S，考虑由

$$F(S) = X(\varphi_S) \tag{46}$$

定义的集合函数F，其中φ_S是S的特征函数. 因此不等式(45)可以写为形式

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F(S_n) > \beta > 0.$$

设n_1是满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F(S_{n_1} \cap S_n) > 0 \tag{47}$$

的最小自然数.

这样的n_1是存在的.

事实上，假设相反，设$\lim\limits_{n\to\infty} F(S_k \cap S_n) = 0$，则对$k = 1,2,\cdots$，有

$$\lim_{n\to\infty} F\left(\bigcup_{i=1}^{k} (S_i \cap S_n) \right) = 0.$$

因此可存在两个递增序列 $\{k_j\}$ 和 $\{n_j\}$，使得对 $j=1,2,\cdots$，有

$$k_j < n_j < k_{j+1},\quad F(S_{n_j}) > \beta \text{ 和 } F\left(\bigcup_{i=1}^{k_j}(S_i \cap S_{n_j})\right) < \frac{\beta}{2}.$$

令 $T_{j_1} = S_{n_j} \setminus \bigcup_{i=1}^{k_j}(S_i \cap S_{n_j})$，有

$$T_{j_1} \cap T_{j_2} = \varnothing \text{ (空集)},\quad \text{对 } j_1 \neq j_2, \tag{48}$$

和

$$F(T_j) > \frac{\beta}{2},\quad \text{对 } j=1,2,\cdots. \tag{49}$$

因此，若用 γ_j 表示集合 T_j 的特征函数，则由公式(48)和(49)得

$$X\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\right) > n\cdot\frac{\beta}{2},\quad \text{对 } n=1,2,\cdots. \tag{50}$$

但是由(48)有 $\left\|\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\right\| \leqslant 1$，因此对 $n=1,2,\cdots$，有 $X\left(\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\right) \leqslant 1$，与(50)矛盾.

如对(47)进行，建立了满足不等式 $\lim_{n\to\infty} F(S_{n_1} \cap S_{n_2} \cap \cdots \cap S_{n_j} \cap S_n) > 0$ 的递增序列 $\{n_j\}$ 的存在性，由此得知集合 $\{S_{n_j}\}$ 中没有一个是空的.

现在对 $i=1,2,\cdots$. 令 q_i 是集合 $S_{n_1} \cap S_{n_2} \cap \cdots \cap S_{n_i}$ 的任意点，则有 $q_i \in S_{n_j}$，当 $i \geqslant j$. 因此由集合 S_n 的定义，对每个 $j=1,2,\cdots$，有不等式 $|x_{n_j}(q_i)| \geqslant \frac{1}{6}\alpha$，由此得知 $\varliminf_{i\to\infty} |x_{n_j}(q_i)| \geqslant \frac{1}{6}\alpha$，从而 $\varlimsup_{n\to\infty} \varliminf_{i\to\infty} |x_n(q_i)| \geqslant \frac{1}{6}\alpha$，与假设(39)矛盾.

定理 6　Banach 空间 E 中范数有界序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 Θ 的充分必要条件是：对每个属于 E 上有界线性泛函的集合 Γ 的泛函序列 $\{X_i\}$，有

$$\lim_{n\to\infty} \varliminf_{i\to\infty} |X_i(x_n)| = 0, \tag{51}$$

其中 Γ 有下面性质：

(1) Γ 是有界线性泛函的范数有界集；

(2) 存在数 $N>0$，使得对每个元素 $x\in E$，集合 Γ 包含满足不等式

$$X(x) \geqslant N \cdot \| x \| \tag{52}$$

的泛函 X.

证明　为了证明条件的充分性，考虑定义在 Γ 上的所有有界实值函数的空间 E_1. 其中对每个元素 $x \in E$，相应地由关系

$$f(X) = X(x), \quad 对\ X \in \Gamma \tag{53}$$

给出泛函 $f \in E_1$.

设 $M = \sup\limits_{X \in \Gamma} \| X \|$ 并令 $f = U(x)$. 由(52)和(53)，$N \cdot \| x \| \leqslant \| f \| \leqslant M \cdot \| x \|$；因此由于 U 是加性算子，U 和它的逆事实上都是有界线性算子.

这就建立了，如果序列 $\{x_n\}$ 满足条件(51)，若令 $f_n(X) = X(x_n)$，则由(53)，有 $\lim\limits_{n \to \infty} \varliminf\limits_{i \to \infty} | f_n(X_i) | = 0$. 由此，由定理 5 得知序列 $\{f_n\}$ 弱收敛于 Θ. 由于 U^{-1} 是有界线性算子以及 $x_n = U^{-1}(f_n)$，由 9.5 节定理 3，序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 Θ.

类似论述可证明条件是必要的.

定理 7　Banach 空间 E 中的范数有界序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 Θ 的充分必要条件是

$$\lim_{n \to \infty} X(x_n) = 0, \quad 对每个\ X \in \Gamma, \tag{54}$$

其中 Γ 是具有定理 6 中性质(1)和(2)的泛函集合，此外它是弱紧的.

证明　由元素的弱收敛性定义，条件是必要的. 为了证明它是充分的，由定理 6，只需证明由(54)得(51).

假设不成立，则存在子序列 $\{x_{n_k}\}$ 和序列 $\{X_i\} \subseteq \Gamma$，使得

$$\varliminf_{i \to \infty} | X_i(x_{n_k}) | > \alpha > 0, \quad 对\ k = 1, 2, \cdots. \tag{55}$$

现在由假设集合 Γ 是弱紧的，存在子序列 $\{X_{i_j}\}$ 弱收敛于泛函 $X_0 \in \Gamma$，因此由(55)，对 $k = 1, 2, \cdots$，有 $| X_0(x_{n_k}) | > \alpha > 0$，这与(54)矛盾.

下面的定理容易从刚才建立的定理得知.

定理 8　紧距离空间 Q 上的连续实值函数的范数有界序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 Θ 的充分必要条件是：有

$$\lim_{n \to \infty} x_n(q) = 0, \quad 对每个\ q \in Q.$$

证明由定理 7 得知，其中 E 表示 Q 上的连续实值函数空间，对 $x \in E$ 和某个

$q \in Q$，Γ 是 E 上所有形如 $X(x) = x(q)$ 的有界线性泛函 X 的集合．于是对每个 $X \in \Gamma$，显然有 $\| X \| = 1$，容易看到 Γ 也满足定理 7 的其他假设.

附注 特别，由定理 8 立刻分别得到单位闭区间和单位正方形上连续函数序列的(弱)收敛性条件.

定理 9 在[0,1]上(本质)有界实值函数空间的函数序列 $\{x_n\} \subseteq M$ 弱收敛于 Θ 的充分必要条件是：对每个满足

$$\int_0^1 | \alpha_i(t) | dt = 1, \quad \text{对 } i = 1, 2, \cdots$$

的函数序列 $\{\alpha_i(t)\}$，有

$$\lim_{n \to \infty} \underline{\lim_{i \to \infty}} \left| \int_0^1 \alpha_i(t) x_n(t) dt \right| = 0.$$

证明由定理 6 得知，其中 Γ 表示 M 上所有形如

$$X(x) = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt, \quad \text{其中 } \int_0^1 | \alpha(t) | dt = 1$$

的有界线性泛函 X 的集合.

于是对每个 $X \in \Gamma$，有 $\| X \| = 1$，并且对每个 $x \in M$，存在满足条件

$$\int_0^1 | \alpha(t) | dt = 1 \text{ 和 } \int_0^1 \alpha(t) x(t) dt \geqslant \frac{1}{2} \| x \|$$

的函数 $\alpha(t)$.

因此只需在所述定理中令 $N = \dfrac{1}{2}$ 就够了.

定理 10 序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 0 的充分必要条件是：对每个指标序列 $\{k_i\}$，有

$$\lim_{n \to \infty} \underline{\lim_{i \to \infty}} | \xi_{k_i}^n | = 0,$$

其中 $x_n = \{\xi_k^n\}$ 是有界实数序列空间 m 的元素序列.

证明由定理 6 得知，其中 Γ 表示所有形如

$$X_j(x) = \xi_j, \quad \text{对 } x = \{\xi_j\} \in m, \quad j = 1, 2, \cdots$$

的泛函序列 $\{X_j\}$ 的集合.

于是对 $j=1,2,\cdots$, 有 $\| X_j \|=1$，进一步对每个 $x\in m$，j 满足 $|X_j(x)|\geqslant \frac{1}{2}\|x\|$.
因此可令 $N=\frac{1}{2}$.

附　注

引　言

A.3　当函数序列 $\{x_n(t)\}$ 渐近收敛于函数 $x(t)$ 时，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$.

A.5　如果 $\{x_n(t)\}$ 是函数的一致有界序列，以及 $\{x_n(t)\}$ 是处处收敛，则由最后的定理得知，对每个有界变差函数 $\alpha(t)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)d\alpha(t)$ 存在(见 F. Riesz. Sur le théorème de M. Egoroff et sur les opérations fonctionelles linéaires. Acta Szeged, 1922, 1：18-26).

A.6　Lebesgue 定理的证明来自 H. Lebesgue, Annales de Toulouse (1909)，也可在 H. Hahn. Über Folgen linearer Operationem. Monatshefte für Math. u. Phys , 1922, 32：1-88 中找到.

B.7　S 中两个元素 x 和 y 之间的距离可用公式 $d(x,y) = \inf\limits_{0<\omega<\infty}[\omega + m(\{t : |x(t) - y(t)| > \omega\})]$ [①]定义. 因此所得距离与正文中的是等价的.

类似地，在空间 s 中，距离 $d(x,y) = \inf\limits_{1<n}\left[\frac{1}{n} + \max\limits_{1<k<n}|\xi_k - \eta_k|\right]$ 等价于正文中给的距离(见 M. Fréchet. Les espaces abstraits. Paris, 1928：82 和 92).

在例 1, 3, 5, 7, 8 和 10 中可以取定义在更一般的集合上的函数. 例如，在例 5 中函数可假定定义在抽象的紧距离空间上，或者甚至是定义在完备的距离空间上，在后一情形只考虑有界连续函数.

如果对算子理论观点感兴趣，许多距离空间的例子可以从 H. Hahn 和 M. Fréchet 的工作中找；关于它的应用可在 J. Schauder 的工作中找到，见 Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen 以及 Bemerkungen zu meiner Arbeit… Math. Zeitschr, 1927, 26，特别请注意 47-65, 417-431. (也见 J. P. Schauder, Oeuvres, PWN. Editions Scientifiques de Pologne. Warsaw, 1978：63-82 和 83-98).

在其他例子中我们注意下面.

11. 所有概周期函数的空间 Q，其中距离 $d(x,y) = \max\limits_{-\infty<t<+\infty}|x(t) - y(t)|$.

12. 空间 $R^p, p \geqslant 1$，为所有定义在单位圆盘 $s^2 + t^2 \leqslant 1$ 上并等价于(即几乎处

① 这个符号的意义见前面引言 A.3 脚注②.

处为)调和函数的空间. 这里适当的距离是

$$d(x,y)=\left(\iint\limits_{s^2+t^2\leqslant 1}|x(s,t)-Y(s,t)|^p\,dsdt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

13. 定义在[0,1]上的函数空间 R 在距离 $d(x,y)=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|$ 下等价于 Riemann 可积函数空间. 对在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上可测且几乎处处有界的函数 $z(t)$, $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}z(t)$ 表示使得 $z(t)\leqslant\omega$ 几乎处处成立的数 ω 的下确界.

例 11 和例 12 可在 G. Ascoli 的工作 Sugli spazi lineari metrici e le loro varieta lineari. Annali di Matematica X, 1932：33-81 中找到, 例 13 在 W. Orlicz 的工作中：Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen. Studia Mathematica 1, 1929：1-39 和 241-255.

Orlicz 进一步研究一类包括 $L^p(p>1)$ 的空间, 这种空间与其他空间共享许多性质.

特别, 设 $M(u)$ 是对所有实值 u 有定义的凸函数, 且满足(1) $M(-u)=M(u)$, (2) $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{u}M(u)=0$, (3) $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{u}M(u)=+\infty$, (4) $\overline{\lim\limits_{u\to\infty}}\frac{1}{M(u)}M(2u)<+\infty$.

设 $N(u)$ 是当 $v\geqslant 0$ 时为关系式 $N(v)=\max\limits_{0<u<\infty}[uv-M(u)]$, 以及当 $v<0$ 时为 $N(v)=N(-v)$ 的对所有实数值 v 有定义的函数.

如此, 对所有在[0,1]上有定义的函数 $x(t)$ 集 O, 积分 $\int_0^1 M[x(t)]dt$ 存在, 距离为

$$d(x,y)=\sup\int_0^1[x(t)-y(t)]\omega(t)dt,\quad \text{其中}\ \int_0^1 N[\omega(t)]dt\leqslant 1,$$

它组成完备的距离空间.

特别, 对

$$M(u)=\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^p\cdot|u|^p,$$

其中 $p>1$, 有 $N(v)=|v|^{p/(p-1)}$ 和

$$d(x,y)=\left(\int_0^1|x(t)-y(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

由此得知空间 O 在这情形与 L^p 重合.

用 $\overline{\lim\limits_{u\to\infty}}\dfrac{1}{M(u)}M(2u)<\infty$ 代替 $M(u)$ 定义中的条件(4)不改变 $N(v)$ 的定义，实数序列 $\{\xi_n\}$ 空间 o，以

$$d(x,y)=\sup\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\eta_n)\omega_n,\quad 其中\ x=\{\xi_n\},y=\{\eta_n\}\ 和\ \sum_{n=1}^{\infty}N(\omega_n)\leqslant 1$$

为它的距离，使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M(\xi_n)$ 收敛，也组成完备距离空间，空间 $l^p,p>1$，是其特殊情形(见 W. Orlicz. Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus (B). Bull. De l'Acad. Polonaise des Sci. et des Lettres. February, 1932).

最后注意到空间 1~13，空间 O 和 o 没有一个是紧的；进一步，它们每一个中的紧集是无处稠的.

B.8　空间 1, 2, 5~10 和 12，以及 W. Orlicz 的空间 O 和 o 都是可分的. 另一方面，如前，空间 3, 4, 11 和 13 是不可分的，当它们的势是连续统时. 后面的每个空间的集的势小于连续统时是无处稠的.

定理 6：见 F. Hausdorff. Mengenlehre (集合论——有中译本). Berlin and Leipzig, 1927：195, II.

B.9　正如 K. Kuratowski 注意到的，如果 B 可测算子双射映可分距离空间 E 到距离空间 E_1，则逆算子满足Baire条件. 证明依赖于B.9定理7以及下面的定理：从距离空间 E 到另一个距离空间 E_1 的算子 U 满足 Baire 条件的充分必要条件是：对每个闭集 $G_1\subseteq E_1$，使得 $U(x)\in G_1$ 的元素 $x\in E$，集 $G=U^{-1}(G_1)$ 满足 Baire 条件(见 K. Kuratowski. La propriété de Baire dans les espaces métriques. Fundamenta Mathematicae , 1930, 16：390-394).

每个解析集满足 Baire 条件：参看 O. Nikodym, Sur une propriété de l'opération A. Fundamenta Mathematicae, 1925, 7: 149-154；那里有对 Euclid 空间的证明，也可不困难地应用到一般情形，记住上述定理是在 I 类纲集上考虑的.

第　1　章

1.1　注意到下面几章研究的 F 空间是 G 空间的特殊例子的事实，当视它们为在上面定义的加法运算的群时，对基本群运算开始选择名词加法，并使得叙述和记号遵守这个运算.

所有的距离空间 1~13，空间 O 和 o 都一样组成 G 空间，正如我们立刻看到的，基本群运算分别取函数或者序列的通常加法. 所有这些空间都是 Abel 群，即它们

的加法是可交换的, 用符号表示为 $x+y=y+x$.

在 G 空间的其他例子中, 可提到下面几个:

14. 从紧距离空间 Q 到它自己的同胚空间, 其中两个同胚 x 和 y 之间的距离由公式 $d(x,y)=\sup\limits_{q\in Q} d(x(q),y(q))+\sup\limits_{q\in Q} d(x^{-1}(q),y^{-1}(q))$ 定义, “加法” 取函数通常的复合.

15. 球(位于距离空间内)到它自己的等距变换空间, 其中距离与加法如上述例子定义.

16. 所有定义在距离空间 Q 上取模为 1 的复值函数(进一步可取它们为连续甚至一致连续函数)空间, 其中函数 x 和 y 之间的距离由公式 $d(x,y)=\sup\limits_{q\in Q}|x(q)-y(q)|$ 定义, “加法” 是通常的函数乘法.

17. 自然数集到它自己的双射变换空间, 或者自然数的排列, 其中距离是

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|x(n)-y(n)|+|x^{-1}(n)-y^{-1}(n)|}{(1+|x(n)-y(n)|+|x^{-1}(n)-y^{-1}(n)|)},$$

(这里 $x(n)$ 等表示 n 在变换 x 下的像), “加法” 是变换的复合.

任意给定一个 G 空间 E, 如果 E 的元素序列 $\{x_n\}$ 收敛, 则显然有

$$\lim_{p,q\to\infty} d(x_p - x_q,\Theta)=0, \tag{I}$$

但是, 反之, 一般并不知道条件(I)是否总可导致这个序列的收敛性.

若在距离空间 E 内, 元素加法的定义使得 E 和这个加法成为一个群, 即使公理 II_1 和 II_2 满足, 由条件 I 总导致序列 $\{x_n\}$ 收敛于 E 的元素, 对 E 是完备空间还不够充分. 尽管如此, 并不知道是否在 E 中存在另一个与给定距离等价的距离, 使得 E 是 G 空间. D. van Dantzig 证明这时在额外的假设下 E 是一个 Abel 空间. 这时甚至可以找到等价的平移不变距离, 即对每个 $z\in E$ 有 $d(x,y)=d(x+z,y+z)$ (见 D. van Dantzig. Einige Sätze über topologische Gruppen. Jahresber. d.Deutsch. Math.ver. 41,1932).

G 空间的定义以及正文中的所有定理可在 S. Banach 下面文章中找到: Über metrische Gruppen. Studia Mathematica, 1931, 3: 101-113 (Oeuvres II: 402-411), 也见 F. Leja. Sur la notion de groupe abstrait topologique. Fundamenta Mathematicae, 1927, 9: 37-44.

1.2 引言 B.7 中的空间 1~10 和空间 11~13, 以及这里定义的空间 O 和 o 都是连通的.

1.3　与定理 5 一起我们有定理：空间 E 是连通的，如果 $\{U_n\}$ 是有界线性泛函序列，且使得这个序列有界的点集是 I 类纲集或者是整个 E .

1.4　从上面的说明得知，空间 E 是连通的,如果 $\{U_{p,q}\}$ 是有界线性泛函的二重序列，使得对序列 $\{x_p\}\subseteq E$ ，和任何 p 有 $\overline{\lim\limits_{q\to\infty}}|U_{p,q}(x_p)|=+\infty$ ，对 $p=1,2,\cdots$ ；满足 $\overline{\lim\limits_{q\to\infty}}|U_{p,q}(x_p)|=+\infty$ 的所有 $x\in E$ 的集合是 II 类纲集，它的补是 I 类纲集.

可以证明当空间 E 假设可分时，第 3 章的定理 3~7 即使对 G 空间 E 和 E_1 也成立(见 S.Banach. loc.cit. Studia Math, 3：101-113 (Oeuvres II：402-411)). 定理 5 也是定理4和这里附注的直接结果. E 可分的假设是本质的，定理3~7对不可分但连通的 G 空间是否也成立，这个问题是有趣的.

注意对每个 G 空间 E 下面两个性质是等价的：

(α) 如果 U 是有界线性算子，它将 E 双射映为 G 空间 E_1，则逆 U^{-1} 也是有界线性算子；

(β) 在 E 上给定另一个距离 $d^*(x,y)$ ，关于它 E 同样是 G 空间，如果由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 总有 $\lim\limits_{n\to\infty}d^*(x_n,x_0)=0$ ，则也有相反的应用.

此外，不知道这些性质是否对例 16 的函数空间也成立，如果那里的 Q 表示模为 1 的复数集.

第 2 章

2.1　考虑不仅是实数也可以是复数与元素乘法且不用修改公理①~⑦的向量空间.这些空间组成复线性算子理论以及更大类的解析算子理论的出发点，这类解析算子提供通常解析函数的推广(例如见 L. Fantappié. I funzionali analitici. Città di Castello, 1930). 我们将在另外的书中详细介绍这个理论.

向量空间 E 的子集 H 称为是 E 中的 Hamel 基，如果每个元素 $x\in E$ 是 H 元素的(有限)线性组合，且没有 H 的元素是 H 其他元素的线性组合，即 H 是线性无关集. 每个向量空间允许有 Hamel 基,任何两个这样的基总有相同的基数.

2.2　对每个向量空间 E，由上面的说明得知 E 上非零加性齐次泛函的存在性.

2.3　由最后这个定理立刻得知，自然数集 N 的每个子集 S 可以按下面方式指定一个测度 $m(S)$ ：① $m(S)\geqslant 0$， ②对不相交的集 S_1 和 S_2 ,有 $m(S_1\cup S_2)=m(S_1)+m(S_2)$ ，③ $m(S_1)=m(S_2)$ ，当 $S_1\equiv S_2$ ，④ $m(N)=1$.

对满足条件①~④的任何测度，形如 $an+b$, $n=1,2,\cdots$ 的所有数集，有测度

$1/a$，其中 a 和 b 固定，所有的素数集的测度是 0. 满足条件①~④的测度并不总与密度(如果它有定义)重合，但总可以按同时满足另外条件的方式进行排列.

关于这条定理，参考 S. Mazur. O metodach sumowalności. Ksiega Pamiatkowa I Polskiego Zjazdu Matematycznego (波兰文). Annales de la Societe Polonaise de Math, 1929 的增刊，见 102-107 中的 103.

第 3 章

3.1　关于 F 空间的定义，见 M. Fréchet. Les espaces abstraits topologiquement affines. Acta. Math, 1926, 47：25-52.

空间 11~13，以及前面定义的空间 O 和 o 显然也是 F 空间. S. Mazur 注意到每个 F 空间满足条件

(1)　若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$，$\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = k$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} (h_n x_n + k_n y_n) = hx + ky$.

不知道满足条件(1)的每个完备向量空间中的距离是否可用与其等价的使得空间是 F 空间的距离代替.

3.3　对满足条件(1)和下面条件(2)的每个距离向量空间 E，定理 3-9 仍保持成立：

(2) 如果 $\lim\limits_{p,q\to\infty} (x_p - x_q) = 0$，则存在元素 $x \in E$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Mazur 建议最后这个条件可用假设空间 E 是完备的代替. 定理 3-5 对 Banach 空间的简单证明可在 J. Schauder 的下面文章的注中找到：Über die Umkehrung linearer stetiger. Funktionaloperationen. Studia Math, 1930, 2：1-6 (全集：162-167).

现在在 F 空间 E 中考虑任意闭线性子空间 G. 如果认为 E 的两个元素 x 和 y 是在同一子集当且仅当 $x - y \in G$，则显然 E 划分为两个不相交的子集. 于是下面定理成立：E 的子集的集合 E' 组成 F 空间，如果距离和基本运算由下面条件定义，其中 X, Y 和 Z 表示 E' 的元素：

(1)　$d(X,Y) = \inf\{d(x,y) : x \in X \text{ 和 } y \in Y\}$;

(2)　$X + Y = Z = \{x + y : x \in X \text{ 和 } y \in Y)$;

(3)　$tX = Y = \{tx : x \in X\}$.

这个定理的证明可以在书 Teorja operacyj. Tom.I. Warsaw, 1931：47-49(波兰文)中找到；也可参考 F. Hausdorff. Zur Theorie der linearen metrischen Räume. Journ. f. reine u. angew. Math, 1932, 167：294-331.

利用这条定理可以证明，如果 U 是从 F 空间 E 到另一个 F 空间 E_1 的连续线

性算子，则如果E是可分的，则U的值域是B可测的．但是，并不知道E是可分的假设是不是本质的.

3.4　这里应用的方法被 S. Saks 和 H. Steinhaus 进一步发展，他们用它来处理函数论中不同的问题(见 S. Saks (Sur les fonctionelles de M. Banach et leur application aux développements des fonctions). Fundamenta Mathematicae, 1927, 10：186-196，以及 H.Steinhaus (Anwendungen der Funktionenanalysis auf einige Fragen der reellen Funktionentheorie). Studia Mathematica, 1929, 1：51-81).

下面的工作包括关于这个算子理论和有关问题的其他方法的应用：

S. Mazurkiewicz. Sur les fonctions non dérivables. Studia Math, 1931, 3：92-94.

S. Mazurkiewicz. Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}dt$. 如上. 114-118.

S. Banach. Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen. 如上. 173-179 (全集 I：218-222).

H. Auerbach 和 S. Banach. Über die Holdersche Bedingung. 如上. 180-184 (全集 I：223-227).

S. Kaczmarz. Integrale vom Dinischen Typus. 如上. 189-199.

3.5　算子理论在微分方程问题中的其他应用由下面说明给出：

S. Banach. Sur certains ensembles de fonctions conduisant aux équations partielles du second ordre. Math. Zeitschr, 1927, 27：68-75.

W. Orlicz. Zur Theorie der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. Bull. Acad. Polon. Sci. et des Lett. February, 1932.

3.6　这一节的最后一个定理的情形(4)已经知道(见 F. Riesz. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris, 1913).

3.7　给定一个闭线性子空间$G\subseteq s$，对每个元素$x_0\in s\setminus G$，在s上存在有界线性泛函f，使得对每个$x\in G$，有$f(x)=0$和$f(x_0)=1$.

由定理 12 得知，如果s上的有界线性算子的值域位于s中，则它是闭的．这个定理的参考文献是 O. Toeplitz. Über die Auflösung undendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo XXVIII, 1909：88-96.

第 4 章

4.1　我和 N.Wiener 几乎同时独立地讨论赋范向量空间，他的工作在 Limit in

terms of continuous transformations. Bull. de la Soc. Math. de France, 1922, 150：124-134.

Banach 空间的一般类的第一次研究是在我的工作：Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. 博士论文. University of Leopol. June, 1920. 发表在 Fund.Math, 1922, 3：133-181.

上面定义的空间 11~13，以及空间 O 和 o 都是 Banach 空间. 另一方面，例 2 中的空间 s 既不是 Banach 空间，如 S. Mazur 证明的，甚至也不同胚于任何一个 Banach 空间.

4.2 和 4.3 中的定理 2-6 可以在 H. Hahn 的说明中找到：Über linearer Gleichungen in linearen Räume. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1927, 157：214-229；也可参看 S. Banach. Sur les fonctionelles linéares. Studia Math, 1929, 1：211-216(全集 II：375-380)，特别是定理 2 和附注.

定理 4 对某些特殊情形的证明是由 F. Riesz 给出：Untersuahungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Mathematische Annalen, 1910, 69：449-497，更一般形式的证明是由 E. Helly 给出(Über lineare Funktionaloperationen. Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Iia, 1912, 121：265-297).

对 F 空间 E 可以建立下面两个等价的性质：

(α) 给定定义在线性子空间 $G \subseteq E$ 上的连续线性泛函 f，存在在整个 E 上的连续线性泛函 F，使得对任何 $x \in G$，满足 $F(x) = f(x)$.

(β) 在相同的条件下，如果进一步 G 是闭的，则对每个 $x_0 \in E \setminus G$，在 E 上存在连续线性泛函 F，使得 $F(x_0) \neq 0$，而对任何 $x \in G$ 有 $F(x) = 0$.

但是,这两个性质在所有的 F 空间中不必成立. 例如空间 S 上的任何连续线性泛函必须恒等于零.

给定两个 Banach 空间 E 和 E_1 以及定义在线性子空间 $G \subseteq E$ 上的有界线性算子 U，它的值域位于 E_1 内. 并不知道是否可以将 G 扩展到整个 E，即是否存在定义在整个 E 上的有界线性算子 V，其值域在 E_1 内，使得对每个 $x \in G$ 有 $V(x) = U(x)$.

当 E_1 是有限维时，U 的这个扩展总是可能的，但是即使条件 $\|V\|_E = \|U\|_G$ 也不总是可实现的.

4.4 空间 C 上的有界线性泛函的一般形式是由 F. Riesz 第一个建立的(Sur les opérations fonctionelles linéaires. C. R. Acad. Sc. Paris, 1909, 149：947-977.

空间 L^r, $r > 1$ 上的有界线性泛函的一般形式，对 $r = 2$ 是由 M. Fréchet 证明的(Sur les ensembles de foncations et les opérations lineaires. C. R. Acad. Sc . Paris, 1907, 144：1414-1416)，一般情形是由 F. Riesz 证明的(F. Riesz. loc. cit. Math. Ann,

1910, 69：475).

空间L^1中的有界线性泛函的一般形式，第一个是由 H. Steinhaus 证明的(Additive und stetige Funktionaloperationen. Math. Zeitschr, 1918, 5：186-221).

条件(1)~(3)可由下面两个条件代替：

① $\alpha_{n_j}=0$，对每个 $j>n$，其中 $n=1,2,\cdots$；

② $\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{n_j}|=\|f\|$，对 $n=1,2,\cdots$.

这条定理是属于 S.Mazur 的.

Orlicz 空间O和o中的有界线性泛函的一般形式建立在附注引言中提及的他的文章中. 例如空间O中的每个有界线性泛函f，有形式$f(x)=\int_0^1 x(t)\alpha(t)dt$，其中$\alpha(t)$是使得$\int_0^1 N(k\alpha(t))dt$对某个位于 0 与 1 之间的$k$存在的函数.

按照 F. Riesz，在空间C上的有界线性泛函$f(x)=\int_0^1 x(t)dg(t)$的范数等于函数$\overline{g}(t)$的变差,其中$g(t)$是有界变差函数，$\overline{g}(t)$定义如下：

$$\overline{g}(0)=g(0),\quad \overline{g}(1)=g(1) \text{ 和 } \overline{g}(t)=\lim_{h\to 0+} g(t+h),\quad \text{对 } 0<t<1.$$

4.6　见 F. Riesz. Sur l'approximation des fonctions continues et des fonctions sommables. Bull. Calcutta Math. Soc, 1928, 9(20)：55-58.

4.7　这两条定理都属于 F. Riesz (见 4.2 已经指出的 Riesz 和 Helly 的文章说明)

4.8　见 F. Riesz 的书：Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris, 1913.

第 5 章

5.1　由定理 3 (见 S. Banach 和 H. Steinhaus. Sur le principe de la condensation de singularités. Fund. Math, 1927, 9：50-61) (全集 II：368)得知有界线性算子范数有界序列$\{U_n\}$的收敛性点集Q总是闭的. 在一般情形Q是$F_{\sigma\delta}$.

与此相关的应该指出，正如 S. Mazur 和 L. Sternbach 证明的，如果$\{U_n\}$是有界线性泛函序列，它的收敛点集是非闭的，则在Q中存在点列$\{x_i\}$和点$x_0\in E\setminus Q$，使得$\lim_{i\to\infty}x_i=x_0$，以及二重序列$\{U_n(x_i)\}$有界. 由此作为推论得到在这些条件下Q不是F_σ. 此外，这些叙述可以推广到更一般的情形，那里$\{x_i\}$是有界线性算子序列，只要它们的值域也是位于 Banach 空间E_1内，且具

有性质：

(γ) 对每个序列$\{y_n\}$，其中$y_n \in E_1$以及$\| y_n \| = 1$，对$n = 1, 2, \cdots$，存在数列$\{t_n\}$使得级数$\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$当其部分和的范数序列有界时发散.

例如，空间c和所有有限维 Banach 空间就具有性质(γ).

上述推论可以说得更确切一点，它是属于 S. Mazur 和我自己，即在所述条件下，集合Q不是$F_{\delta\sigma}$. 作为应用，由它得知定理：每个无穷维 Banach 空间E都包含是$F_{\sigma\delta}$而不是$G_{\delta\sigma}$的子空间. S. Mazur 和 L. Sternbach 进一步证明，每个这类空间都包含线性子空间，它们不是F_{σ}而是F_{σ}与G_{δ}之交；但是每个线性子空间G_{δ}事实上是闭的.

在某些 Banach 空间中可以建立不是$F_{\sigma\delta}$集的$F_{\sigma\delta\sigma}$集的线性子空间的存在性. 在无穷维 Banach 空间这样的子空间，是否永远存在仍是一个未解决的问题. 进一步，也不知道是否存在包含更高 Borel 类的线性子空间或者是解析但不B可测的子空间，或者满足 Baire 条件但不解析的线性子空间的F空间. 每个无穷维F空间包含不满足 Baire 条件的线性子空间.

这些问题与某些考虑的加性算子问题有关. 如果E和E_1是F空间，每个定义在闭线性子空间上，其值域位于E_1内的加性B可测算子U，由 1.3 节定理 4 是连续的. 此外，如果集合G不闭，存在第一 Baire 类的G是B可测、但算子U可不连续的例子，但是还没有更高 Baire 类的例子. 类似地，不知道是否有算子U可满足 Baire 条件同时又不是B可测.

求有界线性算子的逆导致不连续的线性算子. 如果E和E_1是F空间，以及有界线性算子U将E双射映为闭集$G_1 \subseteq E_1$，由 3.3 节定理 5，逆算子U^{-1}连续. 此外，如果G_1不闭，则算子U^{-1}不必连续，但如果空间E可分，那它总是B可测的. 因此，例如在情形$E = E_1 = L^2$，这个算子是 Baire I 类.

5.3　这个引理和定理 8 可在 F. Riesz. 同前. 151 的附注中找到. 容易看出定理 8 的逆也真. 此外，定理 8 可推广如下：每个包含球的紧F空间是有限维的；容易看出其逆也真.

5.4　5.4 节在L^r上证明的定理，对$r > 1$的证明属于 F. Riesz. 对$r = 1$的证明属于 H. Lebesgue (见 Annales de Toulouse, 1909). 对l^r的定理是由 E. Landau 发现的(Über einen Konvergenzsatz. Göttinger Nachrichten, 1907: 25-27).

5.6　所有这些例子都是熟知的.

5.7　对应于数组 A 的法 A 称为标准的，如果对$i < k$有$a_{ik} = 0$，对$i = k$有

$a_{ik} \neq 0$. 对$k>0$, Cesàro 法C_k和类似的 Euler 法E_k是这些方法的例子. 按照 S. Mazur (同前. Studia Math, 2：40-50) 最后两个方法是完满的.

定理 10 属于 O. Toeplitz. (Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace Mat.-Fiz. XXII. Varsovie, 1911：113-119).

不知道当法 A 不可逆时 5.7 节定理 11 是否成立. 对可逆方法的特殊类, 即标准方法(见上面), 这个定理被 S. Mazur 证明(同前. Math. Zeitschr, 1928, 28：599-611, Satz VII).

5.7 节定理 12 可完成如下：如果法 A 是持久可逆, 并使得每个用 A 可和于一数的序列, 用每个弱于 A 的持久方法也可和于同一个数, 则法 A 是完满的. 至于用标准法考虑定理 12 参看 S. Mazur. Über eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren. Studia Math, 1930, 2：40-50.

定义在m的可分线性子空间E上的有界线性泛函的一般形式(见 4.5 节)显示, E上的每个有界线性泛函与由某个法 A 得到的广义极限一致, 即存在数组 A, 使得每个序$x \in E$, 用对应于这个数组的方法可和于$f(x)$. 此外, 如果E不可分, 这个定理可以不成立；进一步, 正如 S. Mazur 注意到的, E上可存在有界线性泛函序列$\{f_n\}$弱收敛于有界线性泛函f, 且使得当f没有这个性质时, 对每个$n=1,2,\cdots$, f_n与由适当的方法得到的广义极限重合.

第 6 章

6.1　紧算子概念是属于 D. Hilbert 和 F.Riesz 的, 他们第一个证明它的效用.

按照 S. Mazur 的说明, 有下面的定理：假设$\{U_n\}$是定义在 Banach 空间E上的紧线性算子序列, 且对每个$x \in E$有$\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x)=x$, 则集$G \subseteq E$紧的充分必要条件是：$\{U_n(x)\}$在$G$上的收敛性是一致的. 由定理 1 使这样的算子序列存在的空间E是可分的. 问题是其逆, 是否每个可分的 Banach 空间允许有这样的算子序列, 这仍是没有解决的问题.

关于集合$G \subseteq E$紧性准则的课题也可参考 A. Kolmogoroff. Über Kompakheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel. Göttinger Nachrichten, 1931：60-63.

6.2　所有这些例子都是知道的.

6.3　伴随算子的概念在我的笔记 Sur les foncationelles linéaires II. Studia Math, 1929, 1：223-239 (全集 II：381-395), 第一次以充分一般的形式引入, 其中也包括 6.3 节定理 3. 6.3 节定理 4 的证明也可在 J. Schauder 的文章 Über lineare vollstetige

Funktionaloperationen. Studia Math, 1930, 2：185-196 中找到.

第 7 章

7.1　W. Orlicz 注意到对弱完备空间 E 的定理 2 可严格化，即级数(2)对每个 $x \in E$ 收敛.

双正交系统 $\{x_i\},\{f_i\}$ 称为是完全的，如果序列 $\{x_i\},\{f_i\}$ 是全序列(见 3.4 节和 4.3 节定义).可以证明在每个可分的 Banach 空间中存在完全双正交系.

双正交系 $\{x_i\},\{f_i\}$ 称为是标准化的，如果有 $\|x_i\|=\|f_i\|=1$，对 $i=1,2,\cdots$. 按照 H. Auerbach 的说明在每个有限维 Banach 空间中存在完全标准化的双正交系. 但是并不知道在每个可分的 Banach 空间中是否也存在完全标准化的双正交系，或者对 $i=1,2,\cdots$ 和 $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\|f_i\|<\infty$，是否总存在满足 $\|x_i\|=1$ 的完全双正交系.

7.2　由上面说明得知，在 7.2 节定理 5 中可抑制假设序列 $\{x_i(t)\}$ 和 $\{y_i(t)\}$ 是完全的.

7.3　基的概念首先是由 J. Schauder 在他下面的文章中以一般方式引入的：Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. Math. Zeitschr, 1927, 26：47-65，其中他也证明在空间 C 如何构造基.

在 L^p，其中 $p>1$，叙述用 Haar 系构造基的定理可在 J. Schauder 的文章 Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems. Math. Zeitschr, 1928, 28：317-320 中找到.

可以证明如果在 Banach 空间 E 中给定序列 $\{x_n\}$，使得对每个 $x \in E$，恰好存在一个数列 $\{t_n\}$ 具有性质：序列

$$\left\{\sum_{n=1}^{k} t_n x_n\right\}$$

弱收敛于 x，则序列 $\{x_n\}$ 组成 E 中的基.

空间 C^p (见引言中的例 7)对 $p=1,2,\cdots$ 有基，但是，不知道在例 10 中是否存在基. 此外，我们也不知道，例如，定义在正方形 $0 \leqslant s \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的所有实值函数 $x(s,t)$ 的空间中是否存在基，其中函数允许有一阶连续偏导数，那里的代数运算按通常的方法(逐点)定义，范数由

$$\|x\|=\max_{0\leqslant s,t\leqslant 1}|x(s,t)|+\max_{0\leqslant s,t\leqslant 1}|x_s'(s,t)|+\max_{0\leqslant s,t\leqslant 1}|x_t'(s,t)|$$

定义.

每个可分的Banach空间E中基的存在性，显然由11.8节建立的定理9等价于空间C中每个闭线性子空间E_1的基的存在性. 现在知道没有一个可分的不与L^2同构的无穷维 Banach 空间使得它的每个闭线性子空间包含基的例子. 同时,每个无穷维Banach空间都包含有基的无穷维闭线性子空间.

对更一般的F空间基的概念可容易地引入. 例如，空间s的基由元素序列

$$\{x_i\},\quad 其中\ x_i=\{\xi_n^i\}\ 和\ \xi_n^i=\begin{cases}1, & 对\ i=n,\\ 0, & 对\ i\neq n\end{cases}$$

给出.

空间S没有基，这由S上不存在非零连续线性泛函这事实得知.

7.4　定理 8 参看 S.Banach 和 H.Steinhaus. Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie des séries orthogonales. Studia Math, 1929, 1：191-200.

定理 10 参看 W. Orlicz. Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen. Studia Math, 1929, 1：1-39 和 241-255.

第 8 章

8.4 节和 8.5 节按照 S.Mazyr 的说明，定理 2-4 在F空间E也成立，只要用泛函序列$\{f_n\}$在球上有界代替定理 2 和定理 3 中的条件(20)即可.

8.6　空间c中的泛函弱收敛性条件由 H.Hahn 给出，空间$l^p, p\geqslant 1$的条件是由 Riesz 给出.

条件(35)和(36)是 H. Lebesgue 发现的.

空间c上有界线性泛函的弱收敛性的条件(45)和(46)(8.8 节)，对空间c_0情形，取形式(1) 序列$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{in}|\right)$有界，以及(2) $\lim_{n\to\infty}\alpha_{in}=\alpha_i,\ i=1,2,\cdots$.

8.7　关于空间$L^p, p>1$中的弱收敛性定理属于 F.Riesz.同前. Math. Annalen, 1910, 69：466-467.

第 9 章

9.1　D. Hilbert 第一个在空间L^2中研究(元素)弱收敛性概念，F. Riesz 在空间$L^p, p>1$中研究此概念.

Banach 空间E的子集G称为(相对)弱(序列)紧，如果G的每个元素序列有弱

收敛子序列. 在空间 L^p 和 $l^p, p>1$，每个有界集是相对弱序列紧的(见第 8 章 8.7~8.8). 在空间 c 和 c_0 同样成立, 但空间 C, L^1, l^1 和 m 就没有分享到这个性质.

9.2 空间 L^p, $p>1$ 中关于序列的弱收敛性定理是由 F. Riesz 证明的, 见 F. Riesz. 同前. Math. Annalen , 1910, 69：465-466.

空间 c 中序列的弱收敛性条件是由 H. Hahn 给出的, 空间 C 和 $L^p, p>1$ 中的条件是由 F. Riesz 给出的, 这一节关于空间 l^1 中范数收敛性和弱收敛性的等价性定理可在 J. Schur 的下面文章中找到：Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. Journ. f. reine u. angew. Math, 1921, 151：79-111.

应该指出, Banach 空间 E 中的有界线性泛函序列当视为空间 E^* 的元素序列时, 其弱收敛性不是同一序列弱收敛的充分条件(在近代术语中这种序列的弱收敛性并不导致它的弱收敛性——英译者注). 例如在 l^1 中弱收敛概念依赖于是否视 l^1 为有界线性泛函空间(例如依赖于 c_0：这给了我们弱收敛的一个类型——英译者注).

9.3 这里对 $L^p, p>1$ 叙述的定理是由 Radon 第一个证明的(Sitzungsberichte der Akad. für Wissensch. in Wien, 1913, 122. Abt：IIa：1295-1438). 也见 F. Riesz. Acta Litt. Ac. Scient. Szeged, 1929, 4：58-64 和 182-185).

9.4 Banach 空间 E 称为弱(序列)完备, 如果每个弱 Cauchy 序列 $\{x_n\} \subseteq E$ (由此得知对 E 上每个有界线性泛函 f, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在)弱收敛于 E 中的某个元素. 空间 c_0, 因此空间 c 和空间 m 都不是弱序列完备的. L^1 的弱序列完备性质是由 H. Steinhaus 建立的(见 Additive und stetige Funktionaloperationen. Math. Zeitschr, 1918, 5：186-221), 空间 L^p 和 l^p, $p>1$, 是由 M. F. Riesz 建立(见 Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Ann, 1910, 69：449-497). 按照 W. Orlicz 的说明(同前. Bull. de l'Acad.Polon. des Sci. et des Let. February, 1932), 空间 O 是弱完备的, 如果 $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{1}{N(u)} N(2u) < +\infty$；对空间 o 同样成立.

Banach 空间中的元素级数称为**非条件收敛**, 如果不管它的项的次序如何, 它总是收敛. 由对空间 F 建立的性质 7 (见 3.3 节)立刻得知, 级数的绝对收敛永远导致它的**非条件收敛**, 但是不知道除了有限维空间, 其逆是否成立. W. Orlicz 证明了下面的定理：

(1) 非条件收敛级数的和与项的次序无关；

(2) 级数非条件收敛的充分必要条件是它每个子级数收敛；

(3) 对相同的结论, 其充分必要条件是每个子级数弱收敛(收敛于某个元素).

由此得知，在空间E是弱序列完备的假设下，E的元素级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$非条件收敛的充分必要条件是：对E上每个有界线性泛函f，级数$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|$收敛. 最后这个结果可以对弱序列完备空间建立. 非条件收敛级数的几个重要性质完全类似于数项级数的非条件收敛的性质. 例如，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$非条件收敛，如果存在数$M>0$，使得对任何不同下标$n_1,n_2,\cdots,n_k$有$\|x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots+x_{n_k}\|<M$，或者如果对任何收敛于0的数列$\{t_n\}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}t_nx_n$收敛. 这些定理在正交级数理论中有其作用(见 W. Orlicz. loc. cit. Studia Math, 1929, 1：241-255).

第 10 章

10.1　关于在这一章对线性算子理论发展的内容见 F. Hausdorff. Zur Theorie der linearen *Räume*. Journ. f. reine u. angew. Math, 1932, 167：294-311.

这一节的定理在情形$E=E'=L^2$，是由 E. Hellinger 和 O. Toeplitz（见 Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Encyklopedie der Math. Wiss. Leipzig, 1923-1927)证明的. 在更一般情形$E=E'=L^p,p>1$，定理 1 和定理 3 是由 F. Riesz 证明的，见 F. Riesz. 同前. Math.Ann, 1910, 69：449-497, 以及对$E=E'=l^p,p>1$由相同作者在他的书 Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris, 1913 中证明. 定理 2 和定理 4 分别对$E=E'=L^p$和l^p，其中$p\geqslant 1$的证明由 S. Saks. Remarques sur les fonctionelles linéaires dans les champs L^p. Studia Mathematica, 1929, 1：217-222 给出.

10.2　这一节的定理除了包含伴随算子概念的证明，都是由 F. Riesz (Über lineare Funktionalgleichungen. Acta Mathematica, 1918, 41：71-98) 第一个给出的.

对某些特殊情形，定理 15 是由 F. Riesz. 同前. Acta Mathematica, 1918, 41：96-98 建立的. 它的完全一般的不同叙述的定理是 T. H. Hildebrandt (Über vollstetige lineare Transformationen. Acta Mathematica, 1928, 51：311-318) 证明，这里的形式是由 J. Schauder. Über lineare. vollstetige Funktionaloperationen. Studia Math, 1930, 2：183-196(全集：177-189)给出的. 如果在这同一定理中抑制假设算子U是紧的，则问题中的方程不能有相同个数的线性无关解. 但是，可以证明，

对 $U=I$ 有不等式 $n \leqslant \nu$，进一步，当空间 E 是弱序列完备且它的有界子集是相对弱紧时，这个不等式又变成等式了(见 S. Mazur. Über die Nullstellen linearer Operationen. Studia Math, 1930, 2：11-20).

10.4 对这些定理参看 J.Schauder. 同前. Studia Math, 1930, 2: 183-196 (全集：177-189).

定理 22：见 F. Riesz. 同前. Acta Mathematatica, 1918, 41(12)：90.

第 11 章

11.2 最早知道两个 Banach 空间之间的等距的例子是 L^2 和 l^2 之间的等距，它是由 Riesz-Fischer 和 Parseval-Fatou 定理给出的.

11.3 定理 2 是由 S. Mazur 和 S. Ulam 证明的(见 C. R. Acad. Sci. 194. Paris, 1932：946-948). 不知道它对 F 空间是否成立；但是按照 Mazur 和 Ulam 的说明它对 G 空间不成立. 进一步，他们指出定理 2 的下面推论：在距离空间 E 内不可能用两个不同方式定义运算(加法和数量乘法)，使得在这样的一种方式下两个情形的 E 变成具相同零元素 Θ 的赋范向量空间.

11.4 没有一对无穷维可分的 Banach 空间不同胚的例子；但是，并不知道如何证明，例如 C 同胚于 c. 同样，不能建立 C 和 l^1 的同胚. 但是空间 L^p 和 l^q 对任何 $p,q \geqslant 1$ 是同胚的(见 S. Mazur. Une remarque sur l' homéomorphie des champs fonctionelles. Studia Math, 1929, 1：83-85).

特别有兴趣的来看，是问 C 是否与正方形上的连续函数空间同胚. 我们知道没有这样的例子，两个紧且有限但不同维数(在 Menger-Urysohn 意义下)的距离空间使得定义在它们上面的连续函数空间是同胚的.

11.5 旋转概念可以在 G 空间中得到一般解释. 可能发生关于 Θ 的旋转只可能由恒同算子给出，即 $U(x)=x$；在 F 空间变换 $V(x)=-x$ 也是关于 Θ 的旋转. 存在无穷维 Banach 空间，那里仅有两个关于 Θ 的旋转. 在这一节建立的 L^2 中旋转的一般形式(15)(事实上知道它已经好长时间了)显示，对范数为 1 的每对元素 x 和 y，存在关于 Θ 的旋转将 x 映为 y. S. Mazur 问一个问题，是否每个具有这个性质的可分无穷维 Banach 空间与 L^2 同构.

11.6 同构概念在 G 空间也有意义. 两个 G 空间等价，如果存在从一个空间到另一个空间的加性等距变换.

对两个同构的 Banach 空间 E 和 E_1，令

$$d(E,E_1)=\inf\left[\log(\|U\|\cdot\|U^{-1}\|)\right],$$

其中 inf 取遍从 E 到 E_1 的所有同构. 若 $d(E,E_1)=0$，空间 E 和 E_1 将称为几乎等距. 等距空间同时是几乎等距. 反之对有限维空间总是成立, 但不知道如何反驳猜测: 例如, 空间 c 和 c_0 不等距但是几乎等距.

考虑从给定的Banach空间 E，用任何等价的范数代替这个范数所得到的所有空间的集合 J_E. 显然每个属于 J_E 的空间与 E 同构, 以及每个与 E 同构的空间与属于 J_E 的空间等距. 将 J_E 划分为子集, 当两个空间几乎等距时, 令它们在相同的子集 ι 内, 对 J_E 的两个子集 ι_1 和 ι_2，令 $d(\iota_1,\iota_2)=d(E_1,E_2)$，其中 E_1 和 E_2 分别属于 ι_1 和 ι_2 的任何两个空间. 可以证明这个距离有定义, 且在这距离下所有 ι 的集合 I_E 组成完备的距离空间. 这些概念的引入是与 S. Mazur 合作的.

11.7　定理 6, 定理 7 和定理 8 是属于 K. Borsuk 的.

研究无穷乘积. 用 $(E_1\times E_2\times\cdots)_{c_0}$ 表示 Banach 空间 E，其中 $E_1,E_2,\cdots$ 是 Banach 空间,其定义如下： E 的元素是所有序列 $\{x_n\}$，其中 $x_n\in E_n, n=1,2,\cdots$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$，加法和数量乘法逐项定义, E 中的范数由 $\|\{x_n\}\|=\max\limits_{n\geqslant 1}\|x_n\|$ 给出. 用类似的方法, 可以定义例如, 空间 $(E_1\times E_2\times\cdots)_c,(E_1\times E_2\times\cdots)_m$ 和 $(E_1\times E_2\times\cdots)_{l^p}$.

11.8　这一节的定理属于 S. Mazur 和我.

P. Urysohn 第一个证明包含等距于每个给定的可分距离空间的子空间的可分距离空间的存在性(见 P. Urysohn. Sur un espace métrique universel. Bull. Sci. Math, 1927, 151：1-38).

定理 10 的证明见 M. Fréchet. Les dimensions d'un ensemble abstrait. Math. Annalen, 1910, 68：161.

11.9　不知道由空间 E_1^* 和 E_2^* 的等价性是否总可得到空间 E_1 和 E_2 的同构(参看定理 11). 定理 12 的逆显然不成立, 但是并不知道定理 13 的逆是否同样成立, 换句话说, 可分的 Banach 空间 E 和空间 E^{**} 的等价性是否导致在 E 元素的每个有界序列中子序列弱收敛于 E 的元素的存在性. 下面的问题也仍未解决：给定一个 Banach 空间 E，它的对偶空间 E^* 是不可分的, 在 E 中是否存在有界序列中没有弱收敛的子序列?

第 12 章

12.3　这一节的定理是我与 S. Mazur 共同发现的. 不等式(18)的证明见 S. Banach 和 S. Saks. Sur la convergence forte dans le champ L^p. Studia Math, 2：51-57 (全集 II：397).

定理 6　证明：常数 M 的存在性由 A. Zygmund 的定理得到(见 Sur les séries

trigonométriques lacunaires. Proc. London Math. Soc, 1930, 5：138-145).

这里分别列举等距, 同构, 和维数不变性等性质, 即如果某个 Banach 空间 E 具有这些性质, 则任何一个与 E 等距, 同构或者与 E 有相同线性维数的空间也分别有这些性质.

等距不变性:

(1) 序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 连同条件 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x_0\|$ 一起导致 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$；

(2) $\|x_0\|=1$ 导致恰好存在一个有界线性泛函 f, 满足 $f(x_0)=1$ 和 $\|f\|=1$；

(3) 空间与它的对偶空间等距;

(4) 空间与它的每个无穷维闭线性子空间等距;

(5) 给定(有限)维数 $n\geqslant 2$ 的每对线性子空间等距.

同构不变性:

(6) 基的存在性;

(7) 对每个闭线性子空间 T, 使得每个元素 x 恰好可写为一个形式 $x=s+t$, 其中 $s\in S$ 和 $t\in T$ 的闭线性子空间 S 的存在性;

(8) 对每个闭线性子空间 S, 从整个空间到整个 S 的有界线性变换的存在性;

(9) 对每个可分空间 E, 从给定空间到整个 E 的有界线性变换的的存在性;

(10) 空间与它的对偶空间的同构;

(11) 空间与它的平方空间的同构.

维数性质:

(12) 弱(序列)完备性质;

(13) 有界子集的弱紧性;

(14) 每个闭线性子空间中基的存在性;

(15) 所有无穷维闭线性子空间的同构;

(16) 所有无穷维闭线性子空间的线性维数的相等性;

(17) 元素序列的弱收敛和范数收敛的等价性;

(18) 空间与它的平方空间的线性维数的相等性.

在下面的表中, 这些性质在不同空间中的出现和不出现分别记为 + 和 -； 空格对应于未解决(困难)的问题, 符号 Θ 对应于所得结果在本书出版以后: 见下面引述的 Cz. Bessaga 和 A. Pelczyńskyi 的综合性文章.

正如 S. Mazur 观察到的, 存在与 L^2 不同构的无穷维可分空间, 它具有性质(3), 因此也有性质(10), 这时不存在这样的空间, 至少在知道的空间中不存在, 它具有性质(4), (5)或(14). 此外, Mazur 已经证明每个无穷维可分空间对 $n=2$ 具有性质(5),

反之与 L^2 同构. 性质(6)在所有不可分空间中不成立. 但是不知道是否所有可分空间有这个性质, 也不知道是否存在可分的无穷维空间它不与空间 L^2, L^1 或 l^1 同构但具有性质(8). 性质(11)和(18)对所有已知的无穷维空间成立. 但是不知道如何去证明或者否定每个可分空间具有性质(14). 最后, 还没有无穷维空间不与 L^2 同构而具有性质(15)的例子.

空间			M	m	C	$C^{(p)}$, $p\geqslant 1$	c	c_0	L^1	L^2	L^p, $1<p\neq 2$	l^1	l^p, $1<p\neq 2$
不变性	等距	1	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
		2	−	−	−	−	−	−	−	+	+	−	+
		3	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
		4	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
		5	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
	同构	6	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		7	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	−	+	Θ	−	Θ
		8	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	+	+		+	
		9	Θ	Θ	Θ	Θ	−	−	+	−	−	+	−
		10	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
		11	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	维数	12	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+
		13	−	−	−	−	+	+	−	+	+	−	+
		14	−	−	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	+	Θ		Θ
		15	−	−	−	−	Θ	Θ	−	+	−		Θ
		16	−	−	−	−	+	+	−	+	−	+	+
		17	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	−
		18	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

应该指出, 在这里考虑的等距不变性没有一个是同构不变的. 但是, 并不知道是否所有的在这里列举的同构性质同时是维数不变的. 在其他未解决的问题中列举下面几个:

(1) 设 X_1 和 X_2 是任何两个在无穷维 Banach 空间 E 中的非零有界线性泛函. 用 G_1 和 G_2 分别表示这两个泛函的核(零空间), 可以证明 $\dim_l G_1=\dim_l G_2$, 是否成立 $\dim_l G_1=\dim_l E$?

(2) 如果两个 Banach 空间的线性维数是不可比较的, 它们的平方空间的线性维数是否也不可比较?

以 S. Mazur 考虑的赋范向量空间的几何的几个结果作为本书的结束.

用 E 表示这样的空间, 它的平移是 E 到它自身的形如 $U(x)=x+x_0, x_0\in E$ 的任何等距变换. 由线性子空间的平移得到的集合称为线性簇. 一个线性簇 $H\neq E$

可以是超平面，如果存在非闭线性簇 G，使得 $H \subseteq G \subseteq E$ 和 $H \neq G \neq E$. 称集合 A 位于超平面 E 的一边，如果每个连接 $A \setminus E$ 两点的线段与 H 不相交. 集 C 称为凸体，如果它是闭. 凸且有内点. 超平面 H 称为凸体 C 的支撑平面，如果 C 位于 H 的一边且与 H 的距离为 0. 因此，特别，H 可以通过 C 的边界点.

利用这个术语有定理：通过凸体 C 的每个边界点 x_0，存在 C 的支撑平面(见 G. Ascoli, Sugli spazi lineari …. Annali di Mathematica, 1932, 10：33-81). 由此得知，每个闭凸集是弱闭的. 换句话说，给定一个 E 的弱收敛于 $x_0 \in E$ 的点列 $\{x_n\}$，存在非负数 $c_i^{(n)}$，其中两个指标都是自然数，使得对每个 n，和充分大的 i 有 $c_i^{(n)} = 0$，以及点列 $\{y_n\}$ 收敛于 x_0，其中 $y_n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(n)} x_i$. 这最后一个收敛性结果是由 S. Mazur 和我得到的，虽然用了其他方法.

特别，对空间 C，D. C. Gillespie 和 W. A. Hurwitz 也得到有关结果(见 On sequences of continuous functions having continuous limits. Trans. Amer. Math. Soc, 1930, 32：527-543, Z. Zalcwasser 也独立地得到它(见 Sur une propriété du champ des fonctions continues. Studia Math, 1930, 2：63-67).

进一步可以证明，(有界)序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于点 x_0 的充分必要条件是：每个(有界)凸体包含无穷多个含有 x_0 的点 x_n.

名 词 索 引

B

变换, 等距,
　线性变换, 194

C

超平面, 196

D

导(集),
　弱导集, 162, 163, 165
等价空间,
　等距空间, 193
　同构空间, 150
等距, 等距(空间), 变换,
　等距不变性, 194, 195

F

泛函, 11, 13, 19~23
　有界线性泛函, 41, 43, 46
　加性泛函, 34
泛函的扩张, 19, 37
赋范空间, 37, 40, 41

G

共轭方程,
　共轭算子, 77
共轭指数, 2

J

极限, 1, 4, 7
　超限极限, 93~95, 98, 114
　弱极限, 96~98, 162, 166
解析或A集,
　闭集, 10, 11, 13
　紧集, 64, 74, 118
　导集, 10, 26, 27
　开集, 10, 15
　连通集, 15, 24
　完满集, 10~12
　凸集, 196
　线性集, 162~166, 168
距离, 7, 9, 10
基, 18, 19, 40
集合的闭包, 151
加法, 18, 131, 142
加性泛函, 34
　加性算子, 16, 17, 25
紧性, 63, 74, 75
　弱紧性, 102, 194
渐近收敛性, 3
近域, 10
矩问题, 57
奇点的凝聚, 17, 62
奇点凝聚原理, 62

K

可测(B)集,
　可测算子, 7, 179, 186

L

邻域, 10

P

平移, 180, 195

Q

求和法, 68, 69
球, 10, 11, 13
　开球, 10, 15, 26~28

球的中心, 10
区域, 31, 32, 86
群, 14, 15, 17

R

弱收敛性, 96, 98, 103~105
  弱极限, 98, 162

S

收敛性, 渐近,
  测度收敛, 3
  平均收敛, 3, 85, 86
双正交系列,
  闭序列, 55
  点列, 7~10, 12
  完全序列, 55
算子, 11, 16, 17
  共轭算子, 77
  加性算子, 16, 17, 25
  连续算子, 38
  齐次算子, 25
  有界线性算子, 38, 60~62, 67
  对称算子, 128
算子的值, 74
  方程的正则值, 123
双正交序列, 83, 84, 87
  闭序列, 89
  超限序列, 93, 94, 148
  点列, 169, 171, 186
  弱序列, 190~192
(算子)收敛,
  级数收敛, 153, 190
  序列收敛, 7, 13

T

同胚, 133~135, 141, 146
同构, 同构空间,
  同构不变性, 194
凸体, 196
  凸函数, 178
  凸集, 196

W

完全空间,
  对偶空间, 90, 92, 114
  线性空间, 18, 40, 92
  赋范空间, 37, 40, 41
  距离空间, 7~12, 14, 18
  连通空间, 17
  泛空间, 144, 146
  可分空间, 142, 195
维数不变性, 194
  等距不变性, 194, 195
  同构不变性, 194

X

线段, 18, 80
线性组合, 18, 41, 55
  线性算子, 16, 17, 25~30
  线性维数, 150, 157~161, 194, 195
  线性变换, 194
  线性簇, 195, 196
旋转, 135~140, 193
线段, 196
线性簇, 195, 196

Y

元素的范数, 129

Z

值域, 11, 12, 16
  子群, 14, 15
支撑平面, 196

著作者索引

Ascoli 178, 196
Auerbach 183, 188
Baire 1, 11, 12, 15~17, 105, 179, 183, 186
Banach 10~12, 19, 22
Borel 186
Borsuk 143, 144, 193
Cantor 145
Cauchy 7, 74, 190
Dantzig 180
Euler 187
Fischer 46, 192
Fredholm 125~127
Haar 87, 188
Hahn 38, 177, 184, 189
Hamel 181
Hausdorff 12, 13, 74
Helly 39, 57, 184, 185
Hilbert 187, 189
Hildebrandt 121, 191
Hobsòn 1~3
Kaczmarz 183
Kolmogoroff 187
Kuratowski 179
Landau 186
Lebesgue 1, 3~6, 100, 106
Leja 180
Lindenbaum 7
Mazur 23, 55, 73, 130
Mazurkiewicz 163, 183
Menger 192
Nikodym 12, 179
Orlicz 89, 178, 179, 183
Parseval 192
Poussin 1
Radon 109, 190
Riemann 4, 22, 80, 178
Riesz 34, 39, 43, 46, 57
Saks 30, 154, 183, 191, 193
Schauder 86, 87, 121, 125
Schur 190
Schwarz 2
Sternbach 185, 186
Stieltjes 1, 4, 80
Toeplitz 35, 183, 187, 191
Ulam 130, 192
Urysohn 192, 193
Volterra 127
Weierstrass 40
Wiener 39, 183, 184
Zygmund 159, 193

Banach 空间现代理论的某些方面

A. Pelczyński　Cz. Bessaga　著

引　言

这个综合报告的目的是叙述专著线性算子理论出版以来，Banach 空间理论领域内的某些结果. 对泛函分析理论以及对线性算子理论的特殊章节有兴趣的读者，可参考专著 Duford 和 Schwartz [1]中的注释、附注，以及 Booubaki [2]中的历史附注(*).

这个综合报告末尾的扩展文献仅仅是讨论领域内的文献，但在这方面也不完全. 泛函分析不同分支的大量文献可在下面的专著中找到：Dunford 和 Schwartz [1], Köthe [1], Lacey [1], Lindenstrauss 和 Tzafriri [1], Semadeni [1]，以及 Singer [1].

这个综合报告中 Banach 的专著线性算子理论以[B]记之. 例如，[B], Rem. V, 5.2 表示这个专著的“附注”第 5 章 5.2 节.

一些最近的信息包含在“附加证明”这一节.

记号与术语. 我们希望调整这些现在通用的(例如，Duford 和 Schwartz [1]中的)，但在某些地方不同于 Banach 用的记号.

用 L^∞ 和 l^∞ 代替 M 和 m，同时我们将经常处理下面的 L^p 的自然推广.

1. 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，$\mu$ 是定义在集合 S 子集的 σ 域 Σ 上的非平凡测度. 对任何一个定义在 S 上 μ 可测的数量函数 f，令

$$\| f \|_p = \left(\int_S | f(s) |^p \ \mu(ds) \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty;$$
$$\| f \|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{s \in S} | f(s) |.$$

$L^p(\mu)$ (在范数 $\|\cdot\|_p$ 下)是所有定义在 S 上几乎处处相等且使得 $\| f \|_p < \infty$ 的函数 f 类的 Banach 空间.

如果 S 是任意非空集，μ 是对 S 所有子集 A 定义的测度，且若 A 是无限集，令 $\mu(A) = \infty$，否则令 $\mu(A) = A$ 的势，则所得的空间 $L^p(\mu)$ 将以 $l^p(S)$ 记之.

对 S 有 n 个元素的有限情形，空间 $l^p(S)$ 将以 l_n^p 记之.

2. 以 $c_0(S)$ 记由 $l^\infty(S)$ 中满足对每个 $\delta > 0$，集 $\{s \in S : | f(s) | > \delta\}$ 是有限的点 $f \in l^\infty(S)$ 组成的 $l^\infty(S)$ 的闭线性子空间.

(*) 方括号中的数字是“文献”和“附加文献”号.

3. 以 $C(K)$ 记定义在紧 Hausdorff 空间 K 上具范数 $\|f\| = \sup_{k\in K}|f(k)|$ 的所有连续数值函数的 Banach 空间.

同时考虑实数域和复数域上的 Banach 空间.

Banach 空间 X 的子空间永远是指 X 的闭线性子空间.

对任何 Banach 空间 X，用 X^* 和 X^{**} 表示 X 的对偶(共轭)和第二对偶(第二共轭). 假设 T：$X \to Y$ 是连续线性算子, 则 T^* 和 T^{**} 表示 T 的对偶(共轭)和第二对偶(共轭)算子.

下文将以术语“线性算子”，“连续线性算子”和”有界线性算子”为同义词, 同样考虑“线性泛函”等.

Banach 空间 X 上的投影意指有界线性投影, 即有界线性算子 P：$X \to Y$ 是幂等的. 投影的值域 X 的子空间称为在 X 中有补的.

第 1 章

1.1　自反与弱紧生成 Banach 空间, 有关反例

[B]中第 11 章的定理 13 是许多研究工作的出发点. 为了叙述结果, 回忆几个已经规范化了的定义.

Banach 空间 X 的弱拓扑是最弱拓扑, 其中 X 上的所有有界线性泛函都连续. 子集 $W \subset X$ 称为是弱紧的, 如果它在 X 的弱拓扑下是紧的; W 称为是序列弱紧的, 如果对 W 元素的每个序列, 存在弱收敛于 W 元素的子序列. 对 $x \in X$, $x^* \in X^*$, 由 $(xx)(x^*) = x^*(x)$ 定义的映射 $x: X \to X^{**}$, 称为 X 到 X^{**} 中的典范嵌入. Banach 空间 X 称为是自反的, 如果 $x(X) = X^{**}$. 在开始提到的 Banach 的定理 13, 刻画了一类可分 Banach 空间中的自反空间. 可分性的假设是多余的. 它是下面由 Eberlein [1]和 Šmulian [1]发现的基本事实的推论.

1.1　Banach 空间 X 的子集 W 是弱紧的充分必要条件是它是序列弱紧的.

1.1 的简单证明由 Whitley [1]给出. 另外的证明及其推广见 Bourbaki [1], Köthe [1], Grothendieck [1], Ptak [1], 和 Pelczyński [1].

由 1.1 得到[B]中第 9 章定理 13 自反性经典表征的推广.

1.2　对每个 Banach 空间 X, 下列陈述等价:

(i) X 是自反的.

(ii) X 的单位球弱紧.

(iii) X 的单位球序列弱紧.

(iv) X 的每个可分子空间是自反的.

(v) 每个有界非空凸闭集的递减序列有非空交.

(vi) X^* 是自反的.

许多有趣的自反性表征由 James [4], [5]给出. 它们中的一个, James [3]就是下面的定理 1.3(简单证明见 James[6]). 为简单起见, 仅对实空间叙述此定理.

1.3　实 Banach 空间 X 是自反的充分必要条件是: 在 X 上的每个有界线性泛函, 在 X 的单位球上达到它的最大值.

比较 1.3 和 Bishop 和 Phelps[1]的下面定理(也见 Bishop 和 Phelps[2])是有趣的.

1.4　对每个实 Banach 空间 X, 在单位球上达到它们下确界的有界线性泛函的集合在 X^* 是范数稠的.

对自反性的其他表征，有兴趣的读者可参看 Day [1],综合报告 Milman[1], 文章 Kothe [1]以及其中的参考文献.

James 给出反例证明[B]附注第 11 章中定理 13 的假设一般不能减弱，并回答了[B]附注第 9 章 9.9 中提的问题.

例 1(James [2]) 设 J 是满足 $\lim\limits_j x(j)=0$ 和 $\|x\|=\sup(|x(p_1)-x(p_2)|^2+\cdots+|x(p_{n-1})-x(p_n)|^2+|x(p_n)-x(p_1)|^2)^{\frac{1}{2}}<\infty$ 的实或复序列 $x=x(j)_{1\leqslant j<\infty}$ 空间，其中上确界取遍指标为 $p_1<p_2<\cdots<p_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 的所有有限递增序列.

容易看到 J 在范数 $\|\cdot\|$ 下是可分 Banach 空间.

1.5 空间 J 有下面性质：

(a) J 等距同构于 J^{**}.

(b) $x(J)$ 在 J^{**} 内有余维 1，即 $\dim J^{**}/x(J)=1$.

(c) 不存在作为实空间的复数域上的 Banach 空间 X 同构于实数序列空间 J (Dieudonné[1]).

(d) 空间 $J\times J$ 不同构于 J 的任何子空间(Bessaga 和 Pelczyński[1]).

(e) J 不是弱完备但没有子空间同构于 c_0.

命题(d)回答了[B]附注的第 12 章中的问题. Banach 空间不同构于它们的笛卡尔正方形的其他例子已由 Semadeni[1](见 11.20)和 Figiel[1]构造出. Figiel 构造的空间是自反的, Semadeni 构造的空间的对偶空间同构于它的笛卡尔正方形.

与[B]附注第 12 章的问题(1)相联系的，需要指出，给定 Banach 空间，它的所有余维为 1 的子空间(即连续线性泛函的核)彼此同构，不过不知道是否存在不同构于它的余维 1 子空间的无穷维 Banach 空间. 但是,存在无穷维赋范线性空间(Rolewicz[1]和 Dubinsky[1])和无穷维局部凸复完备线性距离空间(Bessaga, Pelczyński 和 Rolewicz[1])具有这个性质.

现在讨论 James[8]的另一个例子.

例 2 设 $I=\{(n,i):n=0,1,2,\cdots;\ 0\leqslant i<2^n\}$. 称对 $k=1,2,\cdots,m-1$ $(m,n=0,1,\cdots)$ 满足 $0\leqslant i_{k+1}-2i_k\leqslant 1$ 的形如 $(n,i_1),(n+1,i_2),\cdots,(n+m,i_m)$ 的 I 的子集为线段.设 F 表示 I 上具有有限支撑的数值函数空间. F 上的范数由公式

$$\|x\|=\sup\left(\sum_{q=1}^{p}\Big|\sum_{(n,i)\in S_q}x(n,i)\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义，其中上确界取遍所有两两不相交线段 $S_1,S_2,\cdots,S_p$ 的有限系.在范数 $\|\cdot\|$ 下 F 的完备化用 DJ 记之.

1.6 Banach 空间 DJ 有下面的性质(James[8]):

(a) DJ 是可分的且有不可分的对偶;

(b) DJ 的单位球是条件弱紧的, 即 DJ 元素的每个有界序列 (x_n) 都包含子序列 (x_{k_n}),使得对每个 $x^* \in (DJ)^*$ 极限 $\lim_n x^*(x_{k_n})$ 存在;

(c) 空间 $(DJ)^*$ 的每个可分无穷维子空间 E 都包含同构于 Hilbert 空间 l^2 的子空间;

(d) DJ 没有子空间同构于 l^1;

(e) 如果 B 是由泛函 f_{ni}, $0 \leqslant i < 2^n$, $n = 0,1,\cdots$, 张成的 $(DJ)^*$ 的闭线性子空间, 其中对 $x \in DJ$, $f_{ni}(x) = x(n,i)$, 则 $B^* = DJ$ 和商空间 $(DJ)^* / B$ 同构于不可分 Hilbert 空间(Lindenstrauss 和 Stegall [1]).

由空间 J 的性质(b)和 DJ 的性质(e)得到下面的问题: 给定一个 Banach 空间 X , 是否存在 Banach 空间 Y 使得商空间 $Y^{**} / x(Y)$ 同构于 X ? 这个问题在 James [7], Lindenstrauss [5], Davis, Figiel, Johnson 和 Pelczyński [1]等文章中已被研究. 这方面所得结果涉及一类重要的 WCG Banach 空间.

Banach 空间 X 称为 WCG(弱紧生成的缩写), 如果存在从自反 Banach 空间到 X 的连续线性算子, 它的值域在 X 中稠(参看 Amir 和 Lindenstrauss[1], Davis, Figiel, Johnson 和 Pelczyński[1]). 显然每个自反 Banach 空间都是 WCG. 我们知道(Davis, Figiel, Johnson 和 Pelczyński [1]):

1.7 对每个 WCG Banach 空间 X , 存在 Banach 空间 Y 使得商空间 $Y^{**} / x(Y)$ 与 X 同构.

令 $Z = Y^*$, 得到

1.8 如果 X 是 WCG Banach 空间, 则存在有界线性算子 T: $Z^* \to X$, 使得 Z^{**} 是 $x(Z)$ 与子空间 $T^*(X^*)$ 的直和, 它等距同构于 X^* .

此外, 如果 X 可分, 则上面的空间 Z 可以构造为 Z^* 可分且有 Schauder 基(Lindenstrauss [5]).

WCG 空间已由 Amir 和 Lindestrauss[1]引入, 它们与有限维 Banach 空间共享许多性质. Amir 和 Lindestrauss[1]证明了以下结论:

1.9 如果 X 是 WCG Banach 空间, 则对 X 的每个可分子空间 E, 存在范数为 1 的投影 $P: X \to X$, 它的值域 $P(X)$ 包含 E 且是可分的.

最后这个结果是重赋范 WCG 空间几个定理的出发点. 回忆, 如果 E 按原来范数 $\|\cdot\|$ 是赋范线性空间, 则如果存在常数 $a > 0$, 使得对 $x \in X$ 有 $a^{-1} p(x) \leqslant \| x \| \leqslant a p(x)$, 则范数 $p: E \to R$ 等价于 $\|\cdot\|$. Troyansky [1]证明了下面的定理:

1.10　对每个 WCG Banach 空间 X，存在等价范数 p 是局部一致凸的，即对每个满足 $p(x)=1$ 的 $x \in X$ 以及 X 中的每个序列 (x_n)，由条件 $\lim\limits_n p(x_n) = 2^{-1}\lim\limits_n p(x+x_n)=1$，得 $\lim\limits_n p(x-x_n)=0$.

特别,范数 p 是严格凸的，即 $p(x)+p(y)=p(x+y)$ 导致对 x 和 y 的线性依赖性.

关于可分的 Banach 空间的断言 1.10 是属于 Kadec [1],[2]. 对 WCG 空间等价的严格凸范数的存在性是由 Amir 和 Lindenstrauss [1]建立的.

与 1.10 相联系的，我们注意下面 Day [2]的结果：

1.11　不可数集 S 的空间 $l^\infty(S)$ 允许有不等价的严格凸范数.

关于重赋范定理的更多信息可以在 Day [1]和文章 Asplund [1], [2], Lindenstrauss [6],Troyansky [1], Davis 和 Johnson [1], Klee [1], Kadec [2], Kadec 和 Pelczyński [2], Whitfield [1], Restrepo [1]中找到.

与可分和自反 Banach 空间情形相对照的有(Rosenthal [1])

1.12　存在 Banach 空间 X，它不是 WCG 但与 WCG 空间的子空间同构.

在结束这一节时，再讨论一个例子.

例 3　(Johnson 和 Lindenstrauss [1]) 设 S 是有有限个两两相交的正整数集的无穷子集族(见 Sierpiński [1])，并设 E_0 是 l^∞ 内对 $A \in S$ 包含所有特征函数 χ_A 和所有趋于零的序列的最小线性簇. 容易看到公式

$$\|y\| = \|x+\sum_{j=1}^{n} c_{A_j}\chi_{A_j}\|_\chi + \left(\sum_{j=1}^{n}|c_{A_j}|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad 对\ y=\sum_{j=1}^{n} c_{A_j}\chi_{A_j}$$

定义了 E_0 上的范数，其中 $x \in c_0$，$A_1,\cdots,A_n \in S\ (n=1,2,\cdots)$. 对 $y \in E_0$，系数泛函 $g_k(y)=y(k)$ 在这个范数下连续. 设 E 是 E_0 在范数 $\|\cdot\|$ 下完备化的 Banach 空间，又设 f_k 是 E 上连续线性泛函，它是 $g_k\ (k=1,2,\cdots)$ 的扩充.于是

1.13　空间 E 有下面性质：

(a) 线性泛函 $f_1, f_2,\cdots$，分离 E 中的点.

(b) E 不与任何 WCG 空间的子空间同构，特别 E 不同构嵌入 l^∞.

(c) E^* 同构于积空间 $l^1 \times l^2(S)$，因此它是 WCG.

第 2 章　Banach 空间的局部性质

2.2　Banach-Mazur 距离与投影常数

[B]附注中的第 11 章 11.6 引入的同构 Banach 空间之间的距离在近代 Banach 空间同构性质的研究中起着重要作用，特别在研究给定 Banach 空间 X 的有限维子空间的性质时习惯地涉及到空间 X 的“局部性质”.

设 $a \geqslant 1$. Banach 空间 X 和 Y 称为 a 同构，如果存在 X 到 Y 的同构 T，使得 $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leqslant a$. 若 X 和 Y 是 a 同构的，a 的下确界称为 X 和 Y 之间的 Banach-Mazur 距离，记为 $d(X,Y)$. 显然 1-同构与等距同构相同.

2.1　存在 $d(X_0,X_1)=1$ 的 Banach 空间 X_0 和 X_1，它们不等距同构.

证明　在 c_0 空间内考虑两个范数

$$\|x\|_i = \sup_j |x(j)| + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |2^{-j} x(j+i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 对\ x=(x(j)), i=0,1.$$

对 $i=0,1$，设 X_i 是赋予范数 $\|\cdot\|_i$ 的 c_0 空间；对 $n=1,2,\cdots$，设 $T_n : X_0 \to X_1$ 是由

$$\big(x(1),x(2),\cdots\big) \to \big(x(n),x(1),\cdots,x(n-1),x(n+1),\cdots\big)$$

定义的映射，则每个 T_n 是 X_0 到 X_1 的同构，且 $\lim_n \|T_n\|\,\|T_n^{-1}\|=1$. 因此 $d(X_0,X_1)=1$. 另一方面，范数 $\|\cdot\|_0$ 是严格凸的(定义见 1.1 的 1.10 后面)，而 $\|\cdot\|_1$ 不是. 因此，X_0 与 X_1 不等距同构.

至于 $d(c,c_0)=3$，它与[B]附注中第 11 章 11.6 的问题有关. 这个有趣的事实的推广属于 Cambern [1]和 Gordon [1]；也见 10.19 和它后面的说明.

从紧性论述得知，对任意相同有限维数的 Banach 空间 X,Y，存在 $d(X,Y)$，使得 X 到 Y 等距同构.

下面的重要推断属于 John [1]：

2.2　如果 X 是 n 维 Banach 空间，则 $d(X,l_n^2) \leqslant \sqrt{n}$.

由于 $d(l_n^\infty,l_n^2)=\sqrt{n}$ (见 2.3)，上面的估记是最好的可能. 序列 (d_n) 的确切增长率不知道，其中 $d_n = \sup\ (d(X,Y):\dim X = \dim Y = n)$. 由 2.2 和“三角不等式”

$d(X,Z) \leqslant d(X,Y)\cdot d(Y,Z)$，对 $n=1,2,\cdots$，得 $\sqrt{n} \leqslant d_n \leqslant n$．

计算两个给定的同构Banach空间之间的Banach-Mazur距离相当困难. Gurarii, Kadec 和 Macaev [1], [2]找到

2.3　如果 $1 \leqslant p < q \leqslant 2$ 或者 $2 \leqslant p < q \leqslant \infty$，则

$$d(l_n^p, l_n^q) = n^{1/p-1/q} \quad (n=1,2,\cdots);$$

如果 $1 \leqslant p < 2 < q \leqslant \infty$，则

$$(\sqrt{2}-1)d(l_n^p, l_n^q) \leqslant \max\ (n^{1/p-1/2}, n^{1/2/q}) \leqslant \sqrt{2}d(l_n^p, l_n^q)\ (n=1,2,\cdots).$$

关于空间具有对称基和某些矩阵空间 2.3 的推广见 Gurariĭ, Kadec 和 Macaev [2], [3], Garling 和 Gordon [1].

Banach-Mazur 距离的估计与所谓“投影常数”的计算有关. 设 $a \geqslant 1$ 并令 X 是 Banach 空间. X 的子空间 Y 在 X 中有 a 补的, 如果存在线性投影 $P: X \underset{\text{onto}}{\rightarrow} Y$ 满足 $\|P\| \leqslant a$. 使得 Y 是 X 中有 a 补的数 a 的下确界, 记为 $p(Y,X)$. 对任何 Banach 空间 E，令

$$p(E) = \sup p(i(E), X),$$

这里的上确界取遍所有Banach空间 X 和所有等距同构嵌入 $i: E \to X$. 数 $p(X)$ 称为 Banach 空间 E 的**投影常数**.

一般, 如果 $\dim E = \infty$，则 $p(E) = \infty$. 满足 $p(E) < \infty$ 的 Banach 空间类的表征还不知道(见 11 节). Banach 空间 E 的投影常数与值在 E 中的扩展线性算子有密切关系.

2.4　设 E 是 Banach 空间. 如果 $p(E) < \infty$，则对 Banach 空间组成的每个三元组 (X,Y,T)，它的子空间 Y 和连续线性算子 $T: Y \to E$ 以及对每个 $\varepsilon > 0$，存在线性算子 $\tilde{T}: X \to E$，使得

$$\tilde{T} \text{ 扩展 } T \text{ 且} \|\tilde{T}\| \leqslant C\cdot\|T\|, \tag{*}$$

其中 $C = p(E) + \varepsilon$. 反之, 如果对每个三元组 (X,Y,T)，存在满足(*)的 T，则 $p(E) \leqslant C$.有 $p(E) = \infty$ 当且仅当存在三元组 (X,Y,T)，使得 T 不允许扩展到定义在整个 X 上的有界线性算子.

利用 John 的 2.2, Kadec 和 Snobar [1] 证明了:

2.5　如果 $\dim X = n$，则 $p(X) \leqslant \sqrt{n}\ (n=1,2,\cdots)$.

估记 2.5 给出了最好的增长率. 我们得到(Grünbaum [1], Rutowitz [1],

Daugavet [1]).

2.6 $p(l_n^2)=\pi^{-\frac{1}{2}}n\Gamma(\frac{n}{2})/\Gamma(\frac{n+1}{2})\sim\sqrt{2n/\pi}$ $(n=2,3,\cdots)$.

Rutovitz [1] 以及 Garling 和 Gordon [1]估计了空间 l_n^p 的投影常数.

2.7 如果 $2\leqslant p\leqslant\infty$，则 $p(l_n^p)=n^{1/p}\alpha_p(n)$, 其中 $1/\sqrt{2}<\alpha_p(n)\leqslant\alpha_\infty(n)=1$，$(n=1,2,\cdots)$. 如果 $1\leqslant p\leqslant 2$，则 $p(l_n^p)=n^{\frac{1}{2}}\alpha_p(n)$，其中 $1\geqslant\alpha_p(n)\geqslant\left(\sinh\frac{\pi}{2}\right)^{-1}$ $(n=1,2,\cdots)$.

附注 定理 2.7 涉及实空间 l_n^p. 但是在复情形, 其增长率是相同的.

2.7 对具有对称基的空间推广见 Garling 和 Gordon[1]及其参考文献.

特别, 由 2.7 有 $p(l_n^\infty)=1$, $n=1,2,\cdots$; 有限维 Banach 空间类中等距表征空间 l_n^∞ 的最后性质见 Nachbin [1]和 10.15.

对每个 n 维 Banach 空间 X，容易证明 $p(X)\leqslant d(X,l_n^\infty)$. 不知道量 $p(X)$ 和量 $d(X,l_n^\infty)$ 是否有相同的增长率, 即是否存在与 n 无关的常数 $K>0$，使得对每个 n 维 Banach 空间 X 满足 $d(X,l_n^\infty)\leqslant Kp(X)$. 同样, 数

$$c_n=\sup\{p(X):\dim X=n\},\quad n=2,3,\cdots$$

没有被计算. 最后这个问题的某些结果是由 Gordon[2]给出.

Banach-Mazur 距离和投影常数与有限维 Banach 空间其他等距不变量有关. 这些不变量在某类有限维 Banach 空间的渐近性态, 在维数增长到无穷时产生无穷维 Banach 空间的同构不变量. 这些问题与 Banach 思想的理论有许多共同点, 有兴趣的读者可参看 Grothendieck [5], [6], Lindenstrauss 和 Pelczński [1], 和参考文献 Pietsch [1], Gordon [2], [3], [4], Garling 和 Gordon [1], Gordon 和 Lewis [1], Gordon, Lewis 和 Retherford [1], [2], Snobar [1], Milman 和 Wolfson [1], Figiel, Lindenstrauss 和 Milman [1].

2.3 Banach 空间的局部表示

由 Grothendieck [6]和 James [10]引入的下面概念来源于 Banach-Mazur 距离.

设 $a\geqslant 1$. 称 Banach 空间 X 在 Banach 空间 Y 中局部 a *可表示*, 如果对每个 $b>a$，X 的每个有限维子空间 b 同构于 Y 的子空间. 如果 X 在 Y 中局部 a 可表示, 且 Y 在 X 中局部 a 可表示, 则说 X 与 Y 局部 a 同构. 空间 X 称为在 Y 中局部可表示(局部等距于 Y), 如果 X 在 Y 中局部 1 可表示(局部 1 同构于 Y).

首先讨论在空间 l^p $(1\leqslant p<\infty)$ 和 c_0 中寻找局部可表示的 Banach 空间. 我们知道(Grothendieck [5], Joichi [1], 也见 9.7)

3.1 Banach 空间 X 在 l^2 中局部 a 可表示, 当且仅当 X 与 l^2 是 a 同构.

定理 3.1 推广到 l^p $(1\leqslant p<\infty)$ 的情形如下(Bretagnolle, Dacunha-Castelle 和 Krivine [1], Bretagnolle 和 Dacunha-Castelle [1], Lindenstrauss 和 Pelczyński[1]):

3.2 设 $1\leqslant p<\infty$, 并设 $a\geqslant 1$. Banach 空间 X 在 l^p 中是局部 a 可表示, 当且仅当 X 是 a 同构于空间 $L^p(\mu)$ 的子空间(特别当 X 可分时, a 同构于 L^p 的子空间).

因此由 Schoenberg [1], [2]的结果, Banach 空间 X 在某 l^p, $1\leqslant p\leqslant 2$ 中的局部表示可用 X 的范数是负定的事实来刻画. 对 $2n\leqslant p\leqslant 2n+2$ $(n=1,2,\cdots)$, 更精巧的条件已被 Krivine [1]找到.

最后这个定理对 $p=\infty$ 也成立. 事实上有

3.3 (i) 对每个势 $n\geqslant\aleph_0$, 存在紧 Hausdorff 空间 K 使得空间 $C(K)$ 的拓扑权是 n, 且每个拓扑权 $\leqslant n$ 的 Banach 空间等距同构于空间 $C(K)$ 的子空间;

(ii) 每个 Banach 空间在空间 c_0 局部可表示.

论断(i)推广了古典的Banach-Mazur 定理([B]中第 11 章的定理 9), 它说每个可分的 Banach 空间等距同构于 C 的子空间. (i) 的证明几乎与定理 9 的相同, 但是用每个紧距离空间是 Cantor 集的连续像代替, 应用 Esenin-Volpin [1]的定理(它是在连续统假设下证明的), 对每个势 $n\geqslant\aleph_0$ 存在拓扑权为 n 的紧 Hausdorff 空间 K, 使得每个拓扑权 $\leqslant n$ 的紧 Hausdorff 空间是空间 K 的连续像.

论断(ii)由下列事实得知, 每个具 $2n$ 个顶点的中心对称 k 维多面体仿射等价于立方体 $[-1,1]^n$ (l_n^∞ 空间的单位球)与 l_n^∞ $(k=1,2,\cdots;\ n\geqslant k)$ 的 k 维子空间的交(Klee [2]).

接下来考虑问题: 给定 $p\in[1,\infty]$, 我们来刻画 Banach 空间, 在其中 l^p 是局部可表示的. 对 $p=1,2,\infty$ 叙述答案. (p 为任意的情形属于 Krivine [2] (也见 Maurey 和 Pisier [3], Rosenthal [9], 它比较困难). 下面的漂亮结果属于 Dvoretzky [1]:

3.4 空间 l^2 在每个无穷维 Banach 空间内是局部可表示.

这个结果是下面考虑的凸体事实的简单结论:

3.5(殆球面扇形的 Dvoretzky 定理) 对每个 $\varepsilon>0$ 和每个正整数 k, 存在正整数 $N=N(k,\varepsilon)$, 使得在实或复空间 l_N^2 中的每个关于原点对称的有界凸体 B (即具有非空内点的凸集)允许与逼近 ε Euclid k 维球的 k 维子空间 Y 相交, 即

$$\sup(\|x\|:x\in Y\cap K)/\inf\{\|x\|:x\in Y\setminus K\}<1+\varepsilon.$$

3.5 对实数情形的证明属于 Dvoretzky [2]（早先由 Dvoretzky [1]宣布过）. 某些完全化和简化证明可在 Figiel [2]中找到. 一个以 P. Levy 的某个等周定理为基础的本质上较简单的证明是由 Milman [2]给出，也见 Figiel, Lindenstrauss 和 Milman [1]. Figiel [5]基于 Szankowski [1]思想的证明简短且漂亮.

具无条件基的 Banach 空间(定义见 2.7)有下面的性质(Tzafriri [1])：

3.6　如果 X 是具无条件基的无穷维 Banach 空间，则存在常数 M，投影序列 $P_n: X \to X$ 满足 $\| P_n \| \leqslant M,\ n=1,2,\cdots$ 以及 $p \in \{1,2,\infty\}$，使得 $\sup\limits_n d(P_n(X), l_n^p) \leqslant M$.

3.6 的证明基于构造子对称基的 Brunel-Sucheston [1]技巧，它应用 Ramsey [1] 的某个组合定理. 类似的论述也得知 Dvoretzky 定理的弱形式：对每个无穷维 Banach 空间 X，存在 $a \geqslant 1$ 使得 l^2 在 X 中是 a 可表示.

Banach 空间的表征中，c_0 或等价地，l^∞是局部表示，它与随机级数相联系. 回忆在概率空间 (Ω, μ) 上的可测实函数 f，称 f 为标准 Gauss 随机变量，如果

$$\mu\{\omega \in \Omega : f(\omega) < t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-s^2/2} ds.$$

在区间[0,1]上的 Rademacher 函数 $(r_j)_{1 \leqslant j < \infty}$ 由公式

$$r_j(t) = \operatorname{sgn} \sin 2^j \pi t, \quad j = 1, 2, \cdots$$

定义.

有

3.7　对每个 Banach 空间 X，下面的论述等价：

(i) 对任何 $a \geqslant 1$，空间 c_0 在 X 中不是局部 a 可表示；

(ii) 空间 c_0 在 X 中不是局部可表示；

(iii) 对任何 $p \in [1, \infty)$，空间 c_0 在积空间 $(X \times X \times \cdots)_{l^p}$ 不是局部可表示；

(iv) 存在 $q \in [2, \infty)$ 和常数 $C > 0$，使得对任意 $x_1, \cdots, x_n \in X$ 和 $n = 1, 2, \cdots$，有

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \| x_j \|^q\right)^{1/q} \leqslant C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right\| dt ;$$

(v) 对 X 元素的每个序列 (x_n) 和每个独立标准 Gauss 随机变量的序列，级数 $\sum\limits_n f_n(\omega) x_n$ 几乎处处收敛，当且仅当级数 $\sum\limits_n r_n(t) x_n$ 几乎处处收敛.

(i)和(ii)的等价性是 Giesy [1]证明的. 3.7 中的其他蕴含命题属于 Maurey 和 Pisier [2]. 其他等价性条件，借助紧线性算子的因子分解的叙述可在 Figiel [3]中找

到.

下面的定理刻画 Banach 空间不是局部可表示.

3.8　对每个 Banach 空间 X，下面的论述等价：

(i) 对任何 $a \geqslant 1$，空间 l^1 在 X 不是局部 a 可表示；

(ii) 空间 l^1 在 X 不是局部可表示；

(iii) 对任何 $p \in (1,\infty)$，空间 l^1 在积空间 $(X \times X \times \cdots)_{l^p}$ 不是局部可表示；

(iv) 存在 $q \in (1,\infty)$ 和常数 $C > 0$，使得对任意 $x_1,\cdots,x_n \in X$ 和 $n = 1,2,\cdots$，有

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \| dt \leqslant C(\sum_{i=1}^n \| x_i \|^q)^{1/q};$$

(v) 存在 $q \in (1,\infty)$ 和常数 $C > 0$，使得对任意 $x_1,\cdots,x_n \in X$ 和 $n = 1,2,\cdots$，有

$$\operatorname*{ess\,inf}_{0<t<1} \| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \| \leqslant C(\sum_{i=1}^n \| x_i \|^q)^{1/q}.$$

(i)和(ii)之间的等价性被 Giesy [1]证明. 3.8 中的其他蕴含命题属于 Pisier [1].

与 3.7 和 3.8 相关的，如果 Banach 空间 X 有子空间同构于 l^1 或 c_0，则对每个 $a \geqslant 1$，存在 X 的子空间分别 a 同构于 l^1 或 c_0 (James [3]). 不知道空间 l^p $(1 < p < \infty)$ 是否有类似的性质.

显然，如果 Banach 空间 X 有子空间等距同构于空间 l^p 或 c_0，则对某 $a \geqslant 1$ 空间 l^p 或 c_0 在 X 中分别是局部 a 可表示. 逆蕴含命题一般不成立. 与 Dvoretzky 的定理 3.5 相反，空间 $l^p, 1 \leqslant p < \infty, p \neq 2$ 和 c_0 不包含任何子空间同构于 l^2 (比较 12). 在这方面更“病态”的是 Tzirelson [1]的例子. 下面叙述由 Figiel 和 Johnson [2]给出这个例子的修改形式.

例　设 E_0 是至多有限个非零坐标的所有数列的空间，又设 $(\|\cdot\|_n)$ 是由

$$\| x \|_0 = \sup_k | x(k) |,$$

$$\| x \|_{n+1} = \max\left(\| x \|_n, \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \| \sum_{i=\nu(j-1)+1}^{\nu(j)} x(i)e_i \|_n \right)$$

在 E_0 上定义的范数序列，其中 $e_i = (0,0,\cdots,1,0,\cdots)$，上确界取遍满足 $\nu(0) \geqslant m$ 的指标 $\nu(0) < \nu(1) < \cdots < \nu(m)$ 的所有有限递增序列. 令

$$\| x \| = \lim_n \| x \|_n, \quad 对\ x \in E_0.$$

容易证明上面这个极限存在. 设 E 是 E_0 在范数 $\|\cdot\|$ 下的完备化. 则

3.9　具无条件基的可分 Banach 空间 E 不包含同构的任何空间 l^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 或 c_0.

在结束这一节时, 叙述一个很自然的定理, 它指出 Banach 空间的局部结构和大范围结构之间的区别.

3.10(局部自反性原理)　每个 Banach 空间局部等距于它的第二对偶.

这个事实是下面结果的推论. (为简单起见将 Banach 空间 X 与它在 X^{**} 的典范像 $x(X)$ 等同).

3.11　设 X 是 Banach 空间, E 和 G 分别是 X^{**} 和 X^* 的有限维子空间, 并设 $0<\varepsilon<1$. 假设存在 X^{**} 到 X^* 的投影 P, 满足 $\|P\| \leqslant M$, 则存在连续线性算子 $T: E \to X$ 和 X 到 $T(E)$ 的投影 P_0, 使得

(a) $T(e)=e$, 对 $e \in E \cap X$;

(b) $f(Te)=e(f)$, 对 $e \in E$ 和 $f \in G$;

(c) $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leqslant 1+\varepsilon$;

(d) $\|P_0\| \leqslant M(1+\varepsilon)$.

此外, 如果 $P=Q^*$, 其中 Q 是 X^* 到 X^* 的投影, 则可选取投影 P_0 使得满足(d)和另外条件

(e) $P_0^{**}(x^{**})=P(x^{**})$, 当 $P(x^{**}) \in X$.

定理 3.10 和 3.11 的一部分是由 Lindenstrauss 和 Rosenthal [1]给出的. 定理 3.11 现在的叙述属于 Johnson, Rosenthal 和 Zippin [1]. 另外的证明见 Dean[1].

2.4　凸性模和光滑性模, 超自反 Banach 空间, 无条件收敛级数

进一步的研究必须从事对 Banach 空间局部结构的不变量的讨论, 这与它们的单位球的几何性质有关. 在这一节讨论这种类型的两个不变量: 凸性模(Clarkson[1])和光滑性模(Day[3]).

设 X 是 Banach 空间. 对 $t>0$, 令

$$\delta_X(t)=\inf\{1-\frac{1}{2}\|x+y\|:\|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\| \geqslant t\},$$

$$\rho_X(t)=\frac{1}{2}\sup\{\|x+y\|+\|x-y\|-2:\|x\|=1,\ \|y\|=t\}.$$

函数 δ_X 和 ρ_X 分别称为 Banach 空间 X 的凸性模和光滑性模. 空间 X 称为一致凸(对应地一致光滑), 如果对 $t>0$ 有 $\delta_X>0$ (对应地有 $\lim\limits_{t \to 0} \rho_X(t)/t=0$).

凸性模和光滑性模在某种意义下彼此对偶. 有(Lindenstrauss [8], 也见 Figiel [6]):

4.1 对每个 Banach 空间 X, 有 $\rho_{X^*}(t)=\sup\limits_{0<s<2}(ts/2-\delta_X(s))$.

下面的结果刻画一类 Banach 空间, 对此可定义等价的一致凸(光滑)范数.

4.2 对每个 Banach 空间 X, 下面的条件等价:

(a) X 同构于一致凸又一致光滑的 Banach 空间;

(b) X 同构于一致光滑空间;

(c) X 同构于一致凸空间;

(d) 每个在 X 是局部 a 可表示的 Banach 空间是自反的, 其中 $a>1$;

(e) 每个在 X 局部可表示的 Banach 空间是自反的;

(f) 对偶空间 X^* 满足条件(a)~(e).

满足(4.2)的等价条件的 Banach 空间称为超自反的.

定理 4.2 是 R. C. James [10], [11]和 Enflo [2]工作结合的产物. 蕴含命题“(b)和(c)$\Rightarrow$(a)”是由 Asplund [2]证明的. 借助在单位球上的“测地线”对超自反的刻画见 James 和 Schaffer [1], 借助基本序列的见 V. I. Gurariĭ 和 N. I. Gurariĭ 以及 James [12].

如果 X 是超自反 Banach 空间, 则由(e), l^1 和 c_0 在 X 中都不是局部可表示的. 因此积

$$(l_1^1\times l_2^1\times l_3^1\times\cdots)_{l^2}$$

是自反 Banach 空间而不是超自反的例子. 更精巧的例子属于 James [13], 他证明了

4.3 存在自反 Banach 空间 RJ, 它不是超自反但使得 l^1 在 RJ 不是局部可表示.

Clarkson [1]证明了, 对 $1<p<\infty$, 空间 L^p 和 l^p 是一致凸的. 对 $X=L^p$、l^p, $\delta_X(t)$ 的确切值已被 Hanner [1]和 Kadec [5]所计算. 他们的结果与 4.1 在一起得下面的渐近公式:

4.4 如果 X 是 L^p 或 l^p, $1<p<\infty$, 则

$$\delta_X(t)=a_pt^k+o(t^k),\quad \rho_X(t)=b_pt^m+o(t^m),$$

其中 $k=\max(2,p)$, $m=\min(2,p)$, a_p 和 b_p 是仅依赖于 p 的适当正常数. 此外, 如果 Y 是同构于 L^p 或 l^p 的一致凸(相应地一致光滑)Banach 空间, 则对小正数 t 有

$\delta_Y(t) \leqslant \delta_{l^p}(t)$ (相应地 $\rho_Y(t) \geqslant \rho_{l^p}(t)$).

Orlicz 空间(按[B]中的术语，空间 (o) 和(O))允许有等价的一致凸范数，当且仅当它们是自反的(见 Milnes[1]).

凸性模和光滑性模与空间 X 中的无条件收敛级数的性质有关. 注意性质："Banach 空间 X 的元素级数 $\sum_n \varepsilon_n x_n$ 对每个符号序列 (ε_n) 收敛"等价于在 Orlicz [3] 意义下级数的无条件收敛，见[B]附注第 9 章 9.4.

有

4.5　如果对每个符号序列 (ε_n)，级数 $\sum_n \varepsilon_n x_n$ 收敛，其中诸 x_n 在一致凸 Banach 空间 X 中，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_X(\| x_n \|) < \infty$.

如果对每个符号序列 (ε_n)，级数 $\sum_n \varepsilon_n x_n$ 发散，其中诸 x_n 在一致光滑 Banach 空间 X 中，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_X(\| x_n \|) = \infty$.

4.5 的第一个论断属于 Kadec [5]，第二个属于 Lindenstrauss [8].

结合 4.4 和 4.5，得到(Orlicz [1], [2])

4.6　设 $1 < p < \infty$. 如果 $\sum_n f_n$ 是空间 L^p (或更一般的 $L^p(\mu)$)中的无条件收敛级数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|^{c(p)} < \infty$，其中 $c(p) = \max(p, 2)$.

最后这个事实对空间 L^1 也成立，它不是自反的，因此不是一致凸的. 有 (Orlicz [1])

4.7　如果在空间 L^1 级数 $\sum_n f_n$ 无条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|^2 < \infty$.

4.6 中的指数 $c(p)$ 和 4.7 中的 2 是最好的可能. 这对 $p > 2$ 容易直接验证；对 $1 \leqslant p \leqslant 2$，由 Dvoretzky 和 Rogers [1]关于无条件收敛级数的重要定理得知(也见 Figel, Lindenstrauss 和 Milman [1]).

4.8　设 (a_n) 是正数序列，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. 则在每个无穷维 Banach 空间 X 中，存在无条件收敛级数 $\sum_n x_n$，使得对 $n = 1, 2, \cdots$，有 $\| x_n \| = a_n$. 特别，在每个无穷维 Banach 空间中存在无条件收敛级数 $\sum_n x_n$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| = \infty$.

结合 4.8 和 4.5, 得到

4.9 对每个 Banach 空间 X, 存在正常数 a 和 b, 使得对小 $t>0$ 有 $\delta_X(t) \leqslant at^2$ 和 $\rho_X(t) \geqslant bt^2$.

在结束讨论时, 叙述另一个关于无条件收敛的定理, 它推广了 Orlicz [1]的定理(在[B]附注的第 9 章 9.4 中提到的)

4.10 对每个 Banach 空间 X, 下面的命题等价:

(a) 对 X 元素的每个级数 $\sum_n x_n$, 如果对每个 $x^* \in X^*$, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty$, 则级数 $\sum_n x_n$ 无条件收敛;

(b) 对 X 元素的每个级数 $\sum_n x_n$, 由在[0,1]上几乎处处满足的条件

$$\sup_n \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \| < \infty$$

得级数 $\sum_n x_n$ 的无条件收敛性. (这里 r_n 表示 n 次 Rademacher 函数, $n=1,2,\cdots$);

(c) X 没有子空间同构于 c_0.

条件(a)和(c)的等价性在 Bessaga 和 Pelczyński [3]中有证明. (b)和(c)的等价性属于 Kwapień [2].

关于凸性模和光滑性模以及其他有关 Banach 空间的不变量存在丰富的文献. 在本文已经给出的附加文献中, 读者可以参考 Day 的书[1]的第 7 章 7.2, Lindenstrauss 和 Tzafriri [1], [2], Milman [1], Zizler [1], Cudia [2], Lindenstrauss [4], [6]的综合性文章, 以及文章 Asplund [1], Bonic 和 Frampton [1], Cudia [1], Day [4], Day, James 和 Swaminathan [1], Figiel [1], Figiel 和 Pisier [1], V. I. Gurariĭ [2], [3], [4], Henkin [1], Lvaglia [1], Nordlander [1], [2].

无条件收敛级数的理论与由 Grothendieck 开创的绝对求和算子理论以及在 L.Schwartz 意义下有关 Radon 化算子是无穷维线性空间测度理论的有关分支.有兴趣的读者可参考下面的书和文章: Grothendieck [1], [2], Pietsch [1], [2], [3], Persson 和 Pietsch [1], Lindenstrauss 和 Pelczyński [1], Maurey [1], Kwapień [1], L. Schwartz [1], [2].

进一步的信息见“附加证明”.

第3章　逼近性质和基

在算子理论的许多例子中，将给定线性算子作为具有已知性质算子序列的极限来叙述是方便的. 算子类研究最好的是有限秩算子和紧算子，因此自然要问，是否每个连续线性算子可由这类线性算子逼近. 这个问题已由[B]附注的第6章6.1提出. Banach, Mazur和Schauder已经注意到逼近问题与基的存在性和连续函数逼近的某些问题有关(见书Scottish [1]，问题157). 出版于20世纪50年代中期的Grothendieck [4]对此作了详细研究，他解释了逼近问题在Banach空间结构理论中的基本作用,这个问题出现在各个方面(例如，当我们企图确定核型算子的迹时). 逼近问题的本质进展是Enflo [3]1972年作出的. 他构造了Banach空间没有逼近性质的第一个例子.

3.5　逼近性质

我们从某些记号开始. 算子意指连续线性算子. 对任意 Banach 空间 X 和 Y，记

$B(X,Y)=$ 从 X 到 Y 的所有算子的空间；

$K(X,Y)=$ 从 X 到 Y 的所有紧算子的空间；

$F(X,Y)=$ 从 X 到 Y 的所有有限秩算子的空间.

对任何 $T\in B(X,Y)$，令 $|||T|||=\sup\{\|Tx\|:\|x\|\leqslant 1\}$ 为 T 的算子范数.

定义　Banach 空间 Y 有 ap (=逼近性质)，如果秩在 Y 中的每个紧算子按算子范数是有限秩算子序列的极限，即对每个Banach空间 X 以及对每个 $K\in K(X,Y)$，存在 $F_n\in F(X,Y)$ $(n=1,2,\cdots)$，使得 $\lim\limits_{n}|||F_n-K|||=0$.

这个逼近性质可容易地用 Y 的内在术语表达. 有(参看 Grothendieck [4]和Schaefer [1]，第3章3.9).

5.1　对每个 Banach 空间 Y，下面的命题等价：

(i) Y 有 ap；

(ii) 给定 Y 的紧闭集 C，存在有限秩算子 $F\in F(Y,Y)$，使得对所有 $y\in C$ 有 $\|Fy-y\|<1$.

Enflo [3]关于没有 ap 的 Banach 空间的存在性的值得庆贺的结果被 Davie [1], [2], Figiel [4]和 Szankowski [2]改进如下：

5.2 对每个 $p \in [1,\infty], p \neq 2$，存在空间 l^p 的子空间 E_p 没有逼近性质. 此外, $E_\infty \subset c_0$.

Davie 的证明简短且是一流的, 它用了随机级数的某些性质. Figiel 的证明看来是最初等的. Enflo 的定理以及有关定理的其他证明见 Figiel 与 Pelczyński [1] 和 Kwapień [4]. Kwapień 的结果从调和分析的观点来看也是有意义的. 他证明:

5.3 对每个满足 $2 < p < \infty$ 的 p，存在递增的正整数序列 (n_k) 和 (m_k)，使得由函数 $f_k(t) = e^{in_k 2\pi t} + e^{im_k 2\pi t} (k = 1,2,\cdots)$ 张成的 L^p 的闭线性子空间没有逼近性质.

比较 5.2 与 W. B. Johnson [3].观察到的下面事实是有趣的, 即存在不同构于 Hilbert 空间的 Banach 空间, 使得这个空间的每个子空间有 ap.

从 Banach 空间没有 ap 的一个例子开始, 可以通过对偶空间并取积来构造进一步的例子, 因为逼近性质在这些运算下得到保持. 因此有

5.4 具有 ap 的 Banach 空间的任何有补子空间有 ap.

5.5 设 (E_i) 是每个有 ap 的 Banach 空间序列, 则对 $1 \leqslant p < \infty$，积 $(E_1 \times E_2 \times \cdots)_{l^p}$ 有 ap.

5.6(Grothendieck [4]) 如果 X^* 有 ap，则 X 也有.

最后结果是改进的局部自反性原理 3.11 的简单推论.

有趣的是, 注意到 5.6 的逆不成立. 即由 1.8 得

5.7(Lindenstrauss[5]) 存在有 ap (甚至有基)的 Banach 空间, 但它的对偶没有 ap.

W. B. Johnson [1]给出这种空间的简单构造. 设 (B_n) 是有限维 Banach 空间的序列, 使得对每个 $\varepsilon > 0$ 和每个有限维 Banach 空间 B，存在指标 n_0 使得 $d(B, B_{n_0}) < 1 + \varepsilon$. 令

$$BJ = (B_1 \times B_2 \times \cdots)_{l^1},$$

则空间 BJ 有下面的通用性质:

5.8 任何可分的 Banach 空间的共轭同构于空间 $(BJ)^*$ 的有补子空间.

对 $1 < p < \infty$, 5.2 中可分且自反的空间 E_p 是可分 Banach 空间的共轭. 因此由 5.4 和 5.8, $(BJ)^*$ 没有 ap；另一方面, 由 5.5 和每个有限维 Banach 空间有 ap 的事实, 空间 BJ 有逼近性质.

下面的两个结果不直接涉及 Banach 空间的一般理论, 但是它们与定理 5.2 紧密相关.

5.9 存在定义在正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 上的连续实函数 f，它不能用形如

$$g(s,t)=\sum_{j=1}^{n}a_j f(s,t_j)f(s_j,t)$$

的函数一致逼近，其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是任意实数，$s_1,\cdots,s_n,t_1,\cdots,t_n$ 属于区间[0,1]，且 $n=1,2,\cdots$.

5.10　(a)对每个满足 $\frac{2}{3}<\beta\leqslant 1$ 的实数 β，存在实数矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$，使得

$$A^2=0,\quad 即\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}a_{jk}=0,\quad i,k=1,2,\cdots, \tag{*}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sup_i |a_{ij}|^{\beta}<\infty, \tag{**}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_{ii}\neq 0. \tag{***}$$

(b) 如果矩阵 $A=(a_{ij})$ 对 $\beta=\frac{2}{3}$ 满足(*)和(**)，则 $\sum_{i=1}^{\infty}a_{ii}=0$.

Grothendieck [4]对 $\beta=1$ 证明了 5.9 和 5.10 等价于没有 ap 的 Banach 空间的存在性(蕴含命题“对 $p=\infty$ 的 5.9 $\Rightarrow$ 5.2”已经被 Mazur 大约在 1936 年就证明). 5.10 (a)对 $2/3<\beta<1$ 已被 Davie [3]观察到. 5.10 (b) 属于 Grothendieck [4].

最后注意存在一致代数(Milne [1]) 和 Banach 格(Szankowski [3])没有 ap.

3.6　有界逼近算子

一般，证明一个特殊Banach空间有逼近性质说明问题中的空间已经有较强性质. 这种类型的几个性质已由 Lindenstrauss [1], Johnson, Rosenthal 和 Zippin [1], Grothendieck [4]和 Pelczyński 和 Rosenthal [1] 讨论过. 这里仅讨论有界逼近性质，下一节讨论 Schauder 基的存在性.

定义　称Banach空间 Y 有 bap (= 有界逼近性质)，如果存在常数 $a\geqslant 1$，使得对每个 $\varepsilon>0$ 和每个紧集 $C\subset Y$，存在 $F\in F(X,Y)$，满足

$$\|Fx-x\|<\varepsilon,\quad 对\ x\in C\ 和\ \ |\|F\||\leqslant a. \tag{*}$$

更精确地，称 Y 有具常数 a 的 bap.

不难证明：

6.1 可分 Banach 空间 X 有 bap，当且仅当存在有限秩算子序列 (F_n)，使得

$$\lim_n \| F_n y - y \| = 0, \quad \text{对所有}\ y \in Y.$$

由 5.1 立刻得

6.2 如果 Banach 空间有 bap，则它有 ap.

Figiel 和 Johnson [1]证明 6.2 的逆不成立.

6.3 存在 Banach 空间 FJ，它有 ap 但没有 bap.

6.3 的证明思想如下. 设 X 是有 bap 的 Banach 空间且使得 X^* 没有 ap，例如设 5.8 的 $X = BJ$，接下来利用下面引理：

6.4 设 Y 是 Banach 空间，并设 $a \geqslant 1$. 如果每个同构于 Y 的 Banach 空间有具常数 a 的 bap，则 Y^* 有 bap.

由 6.4 得知，对每个正整数 n，存在 Banach 空间 X_n 同构于 X，并使得 X_n 没有任何小于 n 的常数 a 的 bap. 令

$$FJ = (X_1 \times X_2 \times \cdots)_{l^2}.$$

显然，每个具有 ap 的空间的同构像有 ap，因此每个 X_n 有 ap. 从而由 5.5，空间 FJ 有 ap. 另一方面，FJ 没有 bap. 这从下面事实得知，如果 Banach 空间 Y 有具常数 a 的 bap，且若 Z 是 Y 的子空间，它是范数 $\leqslant 1$ 的投影的值域，则 Z 有具常数 $\leqslant a$ 的 bap.

空间 FJ 也有下面的有趣性质：

6.5 不存在紧线性算子序列 (K_n)，使得对所有 $x \in FJ$，有 $\lim_n \| K_n x - x \| = 0$.

事实上，这种序列的存在性结合 FJ 有 ap 的事实，得知满足 $||| F_n - X_n ||| \leqslant 2^{-n}$，$n = 1,2,\cdots$ 的有限秩算子序列 (F_n) 的存在性. 因此，对所有 $x \in X$，有 $\lim_n \| F_n x - x \| = 0$，由 6.1，这与空间 FJ 没有 bap 的事实相矛盾.

6.5 的结果给[B]附注中第 6 章 6.1 提的问题予以否定的回答.

Freda Alexander [1]注意到，对 $p > 2$、存在空间 L_p 的子空间 X_p，使得 $F(X_p, X_p)$ 在 $K(X_p, X_p)$ 中(在范数拓扑下) 不稠.

Figiel 和 Johnson 的例子 6.3 与下面更深入的结果(Grothendieck [4]，简单证明见 Lindenstrauss-Tzafriri [1]) 相对照.

6.6 如果 Banach 空间 X 是自反或者可分并共轭于 Banach 空间，且 X 有 ap，则 X 有 bap.

下面注意到由改进的局部自反性原理 3.11 得到 5.6 的类似.

6.7(Grothendieck [4])　如果 X 是 Banach 空间，使得 X^* 有常数为 a 的 *bap*，则 X 有具常数 $\leqslant a$ 的 *bap*.

我们用下面的结果来结束这一节，它用完全不同的语言刻画有界逼近性质.

设 S 是紧距离空间 T 的闭子集，E 和 X 分别是空间 $C(S)$ 和 $C(T)$ 的闭线性子空间. 偶 (E,X) 称为有*有界扩张性质*，如果给定 $\varepsilon>0$，每个函数 $f\in E$ 有有界扩张族

$$\Phi(f,\varepsilon)=\{f_{\varepsilon,W}\ :W\supset S,\ W\text{ 在 }T\text{ 中为开}\}\subset X,$$

使得当 $t\in T\setminus W$ 时，有 $|f_{\varepsilon,W}(t)|\leqslant\varepsilon$.

6.8　对每个可分的 Banach 空间 Y，下面的条件等价：

(i) Y 有 *bap*；

(ii) 对紧距离空间 T 的每个闭子集和每个等距同构嵌入 $i:Y\to C(S)$，以及对空间 $C(T)$ 的每个闭线性子空间 X，使得偶 $(i(Y),X)$ 有有界扩张性质，则存在有界线性算子 $L:i(Y)\to X$，使得对 $s\in S$ 和 $f\in i(Y)$ 有 $(Lf)(s)=f(s)$.

蕴含命题(i)$\Rightarrow$(ii)的证明属于 Ryll-Nardzewski，参看 Pelczyński 和 Wojtaszczyk [1]以及 Michael 和 Pelczyński [1]. 蕴含命题(ii)$\Rightarrow$(i)是由 Davie [2]建立的.

3.7　基以及它们与逼近性质的关系

有界逼近性质与空间中基的存在性密切相关. 回忆 Banach 空间 X 的元素序列 (x_n) 对 X 组成基，如果对每个 $x\in X$，存在唯一数列 $(f_n(x))$，使得

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)e_n\,.$$

映射 $x\to f_n(x)$ 是 X 上的连续线性泛函，称为基 (e_n) 的第 n 个系数泛函([B]中第 7 章 7.3).

现在设

$$S_n(x)=\sum_{m=1}^{n}f_m(x)e_m,\quad \text{对 } x\in X,\quad n=1,2,\cdots,$$

显然 (S_n) 是有限秩投影序列，它具性质：$\lim\limits_{n}\|S_n(x)-x\|=0$，对 $x\in X$. 因此由 6.1 得

7.1　如果 Banach 空间 X 有基，则 X 是可分的且有有界逼近性质.

从而每个 bap 不成立的可分 Banach 空间的例子给出没有任何基的可分 Banach 空间的例子. 还不知道具有 bap 而没有任何基的 Banach 空间的例子.

另一方面, 也有关于 bap 和基存在性的肯定性结果.

7.2 可分 Banach 空间有 bap，当且仅当它同构于有基 Banach 空间的有补子空间.

这已经由 Johnson, Rosenthal 和 Zippin [1]和 Pelczyński [6]所建立.

7.3(Lindenstrauss [5], Johnson [1]) 设 X 是可分共轭(相应的可分自反)Banach 空间, 则 X 有 bap，当且仅当 X 同构于有基可分共轭(相应的可分自反)空间的有补子空间.

注意, 由 6.6, 可在 7.3 中用 " ap " 代替 " bap " .

7.4 存在同构唯一的 Banach 空间 UB，有以 (f_n) 为系数泛函的基 (e_n)，使得

(a) 每个有 bap 的可分 Banach 空间同构于 UB 的有补子空间;

(b) 对 Banach 空间 Y 的每个基 (y_k)，存在递增指标序列 (m_k)，同构嵌入 T: $Y\to UB$ 以及投影 $P:UB\to T(Y)$，使得 $Ty_k=\|y_k\|e_{n_k}$, $k=1,2,\cdots$ 和 $P(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{n_k}(x)e_{n_k}, x\in UB$.

(b)部分已被 Pelczyński [8]证明. 通过 7.2, 由(b)得(a). Schechtman [2]给出 7.3(b)的简单证明. Johnson 和 Szankowski [1]完成了 7.3(b), 他们证明如果 E 是 Banach 空间, 使得每个有 ap 的可分 Banach 空间同构于 E 的有补子空间, 则 E 是不可分的.

一个仍未解决的问题是"有限维基问题". 对具系数泛函 (f_n) 的基 (e_n)，令

$$K(e_n)=\sup_m\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|\sum_{n=1}^{m}f_n(x)e_n\|.$$

接下来, 如果 X 是有基的 Banach 空间, 令 $K(X)=\inf K(e_n)$，其中下确界取遍 X 所有基. 最后, 定义

$$K^{(n)}=\sup\{K(X):\dim X=n\}.$$

有限维基问题如下: $\lim_n K^{(n)}=\infty$ 是否成立?

容易证明, $K^{(2)}=1$，且知道对 $n>2$ 有 $K^{(n)}>1$ (Bohnenblust [2]). 由 John 的定理 1.1 得 $K^{(n)}\leqslant n^{\frac{1}{2}}$. Enflo [4]证明, 存在 Banach 空间 X 同构于 Hilbert 空间 l^2 且满足 $K(X)>1$. 利用 7.2 容易证明 5.8 中的 Johson 空间 BJ 有基. 因此由 6.4, 我们推断, 对每个 n，存在有基 Banach 空间 X_n (同构于 BJ) 满足 $K(X_n)\geqslant n$.

对 ap 和 bap 用同样方法，有

7.5(Johnson, Rosenthal 和 Zippin [1])　如果 X^* 有基，则 X 也有基. 反之，如果 X 有基，X^* 是可分且有 ap，则 X^* 有基.

另一方面，由 Lindenstrauss [5]得知，存在有基的 Banach 空间 Z，使得 Z^* 可分且没有 ap，因此 Z^* 没有任何基.

最常见的 Banach 空间的基已被构造. 这里指出有关这方面的两个结果.

7.6(Johnson, Rosenthal 和 Zippin [1))　如果 X 是可分 Banach 空间，使得 X 或 X^* 同构于 C 或 $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ 的空间 E 的有补子空间，则 X 有基.

设 Ω 是紧有限维带边或无边微分流形. 用 $C^k(\Omega)$ 表示 Ω 上所有具 $\leqslant k$ 阶连续偏导数的实函数的 Banach 空间.

7.7　空间 $C^k(\Omega)$ 有基.

特别，对 $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ 和 $k=1$，得到问题([B]附注，第 7 章 7.3)，空间 $C^1([0,1]\times[0,1])$ 是否有基的肯定回答.

7.7 的证明化为下面 Mityagin [3]的结果对具体流形的证明.

7.8　对固定的一对自然数 (k,n)，如果 Ω_1 和 Ω_2 是 n 维带边或无边微分流形，则空间 $C^k(\Omega_1)$ 和 $C^k(\Omega_2)$ 同构.

现在 7.7 由 Ciesielski [1], Ciesielski 和 Domsta [1]，以及独立地由 Schonefeld [1], [2]得到，其中对 Ω 是 $[0,1]^n$ 或 n 维环面 $T^n (n,k=1,2,\cdots)$ 给出了 $C^k(\Omega)$ 中基的明确构造.

Bockariev [1]回答了[B] 附注第 7 章 7.3 中的问题，证明圆盘代数即[B]引言中例 10 的空间有基.

Banach 的定理说明：

7.9　每个无穷维 Banach 空间包含无穷维有基的子空间. 以及[B]附注第 7 章 7.3 宣布的问题在下面的几篇文章中得到改进和修改(见 Bessaga 和 Pelczyński [3], [4], Day [5], Gelbaum [1], Davis 和 Johnson [2], Johnson 和 Rosenthal [1], Kadec 和 Pelczyński [2], Milman [1], Pelczyński [7]). 特别，证明了

7.10(Pelczyński [7])　每个非自反 Banach 空间都包含有基的非自反子空间.

7.11(Johnson 和 Rosenthal [1])　每个无穷维 Banach 空间，如果它是可分 Banach 空间的共轭，则它包含有基的且是共轭空间的无穷维子空间.

7.12(Johnson 和 Rosenthal [1])　每个可分的无穷维 Banach 空间允许有具有基的无穷维商空间.

7.12 中的可分性假设与下面未解决问题有关：是否每个 Banach 空间有可分的无穷维商空间.

关于基的分类和它们的推广以及有关特殊基的性质有着大量的文献. 读者可参考 Day [1] Tzafriri [1]和 Singer [1]的书, 以及综合性文章 Milman [1]和 McArthur [1], 其中讨论了Banach空间中的基, Rolewicz 的书[2], 综合性文章Dieudonné [2], [3], Mityagin [1] ,[2]和 McArthur [1]处理了一般线性拓扑空间中的基.

在结束这一节时, 加入[B]附注第 7 章 7.1 中提的问题, 并由 Ovsepian 和 Pelczyński [1]作的回答. 有(见 Pelczyński [9])

7.13　每个可分 Banach 空间 X 允许有双正交系 (x_n, f_n)，使得 $\|x_n\|=1$, 对 $n=1,2,\cdots$, $\lim\limits_n \|f_n\|=1$，以及(a) 如果 $f\in X^*$，且对所有 n 有 $f(x_n)=0$，则 $f=0$，(b) 如果 $x\in X$，且对所有 n 有 $f_n(x)=0$，则 $x=0$．此外，对给定 $c>1$，可选择双正交序列使得 $\sup\limits_n \|f_n\|<c$.

我们不知道 7.13 的“此外”部分对 $c=1$ 是否成立.

3.8　无 条 件 基

Banach 空间 X 的基 (e_n) 是无条件的, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)x^*(e_n)|<\infty$, 对所有 $x\in X, x^*\in X^*$，其中 (f_n) 是基 (e_n) 的系数泛函序列.

空间中无条件基的存在性是一个非常强的性质. 它在空间确定投影 (P_σ) 的 Boole 代数, 其中对正整数的任何子集 σ，投影 $P_\sigma\in S(X,X)$ 由公式

$$P_\sigma(x)=\sum_{n\in\sigma} f_n(x)e_n$$

定义, 在实数情形, 它也确定 X 上由偏序: $x\prec y \Leftrightarrow f_n(x)\leqslant f_n(y)$, 对 $n=1,2,\cdots$, 诱导的格结构.

关于无条件基的几个结果可以推广到任意投影的Boole 代数和 Banach 格. 读者可参看 Dunford 和 Schwartz [1], 以及 Lindenstrauss 和 Tzafriri 的第 III 部分.

为了阐述Banach空间中无条件基的存在性结果, 我们叙述属于R. C. James [1]的一个古典结果.

8.1　具有无条件基的 Banach 空间是自反的, 当且仅当它的子空间没有一个是同构于 c_0 或 l^1.

由 8.1, 1.5,和 1.6 立刻得知, 3.1 中定义的空间 J 和 DJ 没有无条件基. 事实上, 这两个空间不能同构嵌入具无条件基的任何 Banach 空间. 因此, 泛空间 C ([B]的第 11 章 11.8)没有无条件基.

无条件基在序列空间如 $l^p\,(1\leqslant p<\infty)$，$c_0$ 以及可分的 Orlicz 序列空间(=[B]附注引言 B.7 中引入的记号 (o))是平凡的. Paley [2]和 Marcinkiewicz [1]的结果比较困难.

8.2　Haar 系是空间 $L^p, 1<p<\infty$ 中的无条件基.

这个定理相对简单的证明见 Burkholder [1].

Paley-Marcinkiewicz 定理可推广到对称函数空间. 对称函数空间是由[0,1]上 Lebesgue 可测函数的等价类组成的 Banach 空间 E，它满足

(a) $L^\infty\subset E\subset L^1$；

(b) 如果 $f_1\in E$，f_2 是[0,1]上的可测函数，使得如果 $|f_2|$ 与 $|f_1|$ 是等分布的，则 $f_2\in E$ 且 $\|f_2\|_E=\|f_1\|_E$.

下面的结果属于 Olevskii [1]，证明见 Lindenstrauss 和 Pelczyński [2].

8.3　对称函数空间 E 有无条件基，当且仅当 Haar 系是 E 的无条件基.

结合 8.2 和 Semenov [1]定理的补充，得到

8.4　设 E 是对称函数空间，令 $g_E(t)=\|\chi_{[0,t]}\|_E$，其中 $\chi_{[0,t]}$ 表示区间 $[0,t]$ 的特征函数. 如果 $1<\liminf\limits_{t\to 0} g_E(2t)/g_E(t)\leqslant\limsup\limits_{t\to 0} g_E(2t)/g_E(t)<2$，则 Haar 系是 E 的无条件基.

这个定理的推论是下面的结果，早先它是由 Gaposhkin [1]用不同方法得到的：

8.5　Orlicz 函数空间(按[B]中的记号是空间(O))有无条件基，当且仅当它是自反的.

无条件基的一个重要类是对称基. 一个对 X 具系数泛函序列 (f_n) 的基 (e_n) 称为对称的，如果对每个 $x\in X$ 和对指标的每个排列 $p(\cdot)$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)e_{p(n)}$ 收敛.

下面的结果属于 Lindenstrauss [9].

8.6　设 (y_k) 是 Banach 空间 Y 的无条件基，则在 Banach 空间 X 中存在对称基 (x_n) 以及同构嵌入 $T:Y\to X$，它在向量 y_k 上的值是

$$Ty_k=c_k\cdot\sum_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} x_n,\quad \text{对}\ k=1,2,\cdots,$$

c_k 为某个数量以及指标 $1\leqslant n_1<n_2<\cdots$.

对每个具系数泛函 $f_n\,(n=1,2,\cdots)$ 的对称基 (e_n)，以及每个指标的递增序列 (n_k)，由

$$P(x)=\sum_{k=1}^{\infty}((n_{k+1}-n_k)!)^{-1}\cdot\sum_{p\in\Pi_k}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}f_{p(j)}(x)e_j$$

定义的算子 $P:X\to X$ 是由块 $\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}e_j(k=1,2,\cdots)$ 张成的 X 的子空间上的有界投影，其中 Π_k 表示指标 $n_k+1,\cdots,n_{k+1}$ 所有排列的集合. 因此，由 8.6 有

8.7(Lindenstrauss [9]) 每个具无条件基的 Banach 空间同构于具对称基的 Banach 空间的有补子空间.

8.7 的逆不知道是否成立，或者等价地，是否具无条件基的 Banach 空间的每个有补子空间都有无条件基. 这个问题还没有解决，即使对 L^p $(1<p<\infty;p\neq 2)$ 的有补子空间.

下面的结果类似于 7.4.

8.8 存在同构唯一且具对称基的 Banach 空间 US，使得每个有无条件基的 Banach 空间同构于 US 的有补子空间. 此外，空间 US 存在具有下面性质的无条件基但没有对称基：

(*) 对在任何 Banach 空间 Y 中的每个无条件基 (y_k)，存在同构嵌入 $T:Y\to US$ 和指标 (n_k) 递增序列，使得对 $k=1,2,\cdots$，有 $Ty_k=\|y_k\|e_{n_k}$.

具有性质(*)的无条件基的存在性是由 Pelczyński [8]建立，另外较简单的证明也见 Zippin [2]. 结合(*)和 8.7 得到 8.8 的第一个陈述.

与 7.5 相对照有

8.9 存在 Banach 空间 X，它没有任何无条件基，但它的共轭 X^* 有无条件基.

这种空间的一个例子是 $C(\omega^\omega)$，即在所有序数 $\leqslant\omega^\omega$ 的紧 Hausdorff 空间上所有数值连续函数的空间，它的共轭是 l^1 (见 Bessaga 和 Pelczyński [2], 62 页以及 Lindenstrauss 和 Pelczyński [1], 297 页). 没有 ap 的 Banach 格的存在性(Szankowski [8])导致 $(US)^*$ 没有 ap (但是，如果 X^* 可分且 X 有无条件基，则 X^* 也有无条件基!).

我们并不知道每个无穷维 Banach 空间是否包含具无条件基的无穷维子空间(比较 7.9).

我们以讨论“无条件有限维基问题”结束这一节，这个问题已被 Y. Gordon 和 D. Lewis 解决. 对具有系数泛函 (f_n) 的无条件基 (e_n)，令

$$K_u(e_n)=\sup\{\sum_n|f_n(x)x^*(e_n)|:\ \|x\|\leqslant 1,\ \|x^*\|\leqslant 1\}.$$

接下来，如果 X 是具有无条件基的 Banach 空间，令 $K_u(X)=\inf K_u(e_n)$，其中下确

界取遍 X 的所有无条件基. 最后, 定义

$$K_u^{(n)} = \sup\{K_u(X) : \dim X = n\}.$$

设 $B_n = B(l_n^2, l_n^2)$ 是从 n 维 Euclid 空间到它自己的所有线性算子的 n^2 维 Banach 空间.

Gordon 和 Lewis [1]证明了

8.10　存在 $C>0$，使得对 $n=1,2,\cdots$，有 $C\sqrt{n} \leqslant K_u(B_n) \leqslant \sqrt{n}$.

事实上, 他们得到一个更强的结果:

8.11　如果 Y 是有无条件基的 Banach 空间, 且 Y 包含等距同构于 B_n 的子空间, 则对这个子空间上 Y 的每个投影 P，有

$$\| P \| \cdot X_u(Y) \geqslant C\sqrt{n},$$

其中 $C>0$ 是与 n 无关的通有常数.

序列 $(K_u^{(n)})$ 的确切增长率最近被 Figiel, Kwapień 和 Pelczyński [1]找到, 他们证明 $K_u^{(n)} \geqslant C\sqrt{n}$. 由此从 John 的定理 2.2 得 $K_u^{(n)} \leqslant \sqrt{n}$.

第 4 章

4.9 Banach 空间类中 Hilbert 空间表征

在[B]附注的第 10 章考虑的 Banach 空间类中的 Hilbert 空间的等距和同构表征问题刺激许多数学家的研究活动. Hilbert 空间的同构表征已经证明比等距表征更加困难.

如果下面命题成立, 就说有性质(P), 即 Banach 空间类中 Hibert 空间的等距(同构)表征:"Banach 空间 X 有性质(P)当且仅当 X 等距同构(同构)于 Hilbert 空间". 所谓 Hibert 空间是指任何一个 Banach 空间 H (可分,不可分或有限维), 它的范数由 $\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}$ 给出, 其中 $(\cdot,\cdot):H\times H\to K$ 是内积, K 是数域(实数或复数).

先讨论 Hilbert 空间的等距表征. 在 Day[1]的第 7 章 7.3 对这个领域的结果有广泛的叙述. 因此在这里仅限于讨论最重要的事实并给出一些增补信息.

Hilbert 空间的基本等距表征属于 Jordan 和 von Neumann [1].

9.1 Banach 空间 X 等距同构于 Hilbert 空间, 当且仅当它满足平行四边形等式:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\quad \text{对所有 } x,y\in X.$$

它的直接推论是

9.2 Banach 空间 X 等距同构于 Hilbert 空间, 当且仅当 X 的每个二维子空间等距于 Hilbert 空间.

类似的表征但用 3 维子空间代替 2 维子空间是由 Fréchet[1]较早发现的. 在 20 世纪 30 年代 Aronszajn[1]找到 Hilbert 空间的另一个等距表征, 如 9.2 它是二维表征, 即借助于这个空间中一对向量的一些性质进行叙述.

本质是 3 维特性的表征在实空间情形是由 Kakutani [1]给出的(也见 Phillips [1]), Bohnenblust [1]讨论了复空间情形. 叙述为

9.3 对 Banach 空间 X, 其中 $\dim X\geqslant 3$, 下面的陈述等价:

(i) X 等距同构于 Hilbert 空间;

(ii) X 的每个 2 维子空间是范数 1 投影的值域;

(iii) X 的每个子空间是范数 1 投影的值域.

这里以及下面, 用“dim”表示关于对应数域的代数维数.

假设 H 是满足 $2<\dim H\leqslant\infty$ 和 $2\leqslant k<\dim H$ 的 Hilbert 空间. 显然 H 所有 k 维子空间彼此等距同构. 问题是([B]附注的第 12 章性质(4)和(5))是否是上面表征 Hilbert 空间的性质仅部分得到了解决, 即在某些维数限制下得到解决. 我们说实(相应复)Banach 空间 X 有性质 $H^k, k=2,3,\cdots$, 如果 $\dim X\geqslant k$, 且 X 所有 k 维实(相应复)子空间彼此等距同构.

9.4 下面两个表给出限制 Banach 空间 X 的维数, 使得在这个维数下由性质 H^k 导致 X 等距同构于 Hilbert 空间.

实情形		复情形	
k 偶数	$k+1\leqslant\dim X\leqslant\infty$	k 偶数	$k+1\leqslant\dim X\leqslant\infty$
k 奇数	$k+2\leqslant\dim X\leqslant\infty$	k 奇数	$2k\leqslant\dim X\leqslant\infty$

$k=2$, $\dim X<\infty$ 的实情形已被 Auerbach, Mazur 和 Ulam [1] 解决. $\dim X=\infty$ 的情形是 Dvoretzky [2]的关于殆球面截口定理的直接推论(见 3.5), 这是被 Dvoretzky [1]观察到的. 剩下的命题属于 Gromov [1]. 最简单而没有解决的情形是 $k=3$, $\dim X=4$.

我们指出 Hilbert 空间两个更进一步的等距表征.

9.5(Foias [1], von Neumann [1]) 复 Banach 空间 X 等距同构于 Hilbert 空间, 当且仅当对每个线性算子 $T:X\to X$ 和每个复系数多项式 P, 不等式 $\|P(T)\|\leqslant\|T\|\cdot\sup\limits_{|z|=1}|P(z)|$ 成立.

9.6(Auerbach [1], von Neumann [2]) 有限维 Banach 空间 X 等距同构于 Hilbert 空间, 当且仅当 X 的线性等距群传递作用在 X 的单位球上, 即对满足 $\|x\|=\|y\|=1$ 的每对点 $x,y\in X$, 存在线性等距 $T:X\xrightarrow[\text{onto}]{}X$, 使得 $T(x)=y$.

附注 设 $1\leqslant p<\infty$, 并设 μ 是任意非 σ 有限非原子测度, 则空间 $L^p(\mu)$ 的线性等距群传递作用在这空间的单位球上. 因此 9.6 假设 X 是有限维是本质的. 是否存在异于Hilbert空间的可分Banach空间的线性等距群传递作用在单位球上, 这问题仍未解决(见[B]附注第 11 章 11.5).

现在我们讨论 Hilbert 空间各种不同的同构表征. 它们中最简单的是反映 Hilbert 空间固定维数的所有子空间是同构的事实, 因此是“等度同构”的. 更确切地说, 有

9.7 对每个 Banach 空间 X, 下面的条件等价:

(1) X 同构于 Hilbert 空间;

(2) $\sup_n \sup_{E\in\mathcal{U}_n(X)} d(E,l_n^2)<\infty$；

(3) $\sup_n \sup_{E\in\mathcal{U}^n(X)} d(E,l_n^2)<\infty$,

其中$\mathcal{U}_n(X)$(相应的$\mathcal{U}^n(X)$)表示空间X所有n维子空间(相应的商空间)族.

由 Dvoretzky 的定理得知条件(2)和(3)分别可由下面的条件代替：

(2') $\sup_n \sup_{E,F\in\mathcal{U}_n(X)} d(E,F)<\infty$,

(3') $\sup_n \sup_{E,F\in\mathcal{U}^n(X)} d(E,F)<\infty$.

定理 9.7 蕴含在 Grothendieck [5]中. Joichi [1] 明确叙述(1)和(2)之间的等价性, 参看这里的 3.1. 与 9.7 相关的注意到下面的问题仍没有得到回答："如果X是 Banach 空间, 且X所有无穷维子空间彼此同构, 则X是否同构于 Hilbert 空间?"([B]附注第 12 章).

Lindenstrauss 和 Tzafriri[3]下面的漂亮结果(也见 Kadec 和 Mityagin[1])是定理 9.3 的同构类似.

9.8 Banach 空间X同构于 Hilbert 空间, 当且仅当

$$X\text{ 的每个子空间是有补的.} \tag{*}$$

这个定理显示[B]附注中讨论的性质(7)是同构于 Hilbert 空间的 Banach 空间的仅有特性.

9.8 的证明, 首先从 Davis, Dean 和 Singer [1]的观察得知, 由条件(*)得

$$\infty>\sup_n P_n(X)=\sup_{E\in\mathcal{U}_n(X)}\inf\{\|P\|:P\text{ 是 }X\text{ 到 }E\text{ 的投影}\},$$

其次巧妙地应用 Dvoretzky 的定理 3.4, 证明由$\sup_n P_n(X)<\infty$得到 9.7 的条件(2).

历史附注 定理 9.8 说明每个不同构于任何 Hilbert 空间的 Banach 空间是不可补子空间. 在具体的 Banach 空间中这种子空间的构造相对比较困难. Banach 和 Mazur [1]证明l^1的每个等距同构在空间C中是不可补的. Murray[1]构造了L^p空间中的不可补子空间. 对一大类具有对称基的 Banach 空间, Sobczyk [2]给出不可补子空间的漂亮构造.

结合 9.8 和 Grothendieck [4]早先的结果, 得到

9.9 只到同构的, 具性质(*)的局部凸的完备线性距离空间是 Hilbert 空间, 如所有数列的空间s以及空间$s\times H$, 其中H是无穷维 Hilbert 空间.

用与 9.8 相同方法可以证明(见 Lindenstrauss 和 Tzafriri [3])：

9.10 Banach 空间 X 同构于 Hilbert 空间，当且仅当对 X 的每个子空间 Y 和每个紧线性算子 $T:Y\to Y$，存在扩张 T 的线性算子 $\tilde{T}:X\to Y$.

Hilbert 空间的一个有趣表征是属于 Grothendieck [5] (也见 Lindenstrauss 和 Pelczyński [1]).

9.11 Banach 空间 X 同构于 Hilbert 空间，当且仅当存在常数 K，使得对每个数量矩阵 $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}(n=1,2,\cdots)$ 和每个范数为 1 的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$，以及范数为 1 的 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\in X^*$，存在每个绝对值都 $\leqslant 1$ 的数 $s_1,s_2,\cdots,s_n,t_1,\cdots,t_n$ 满足

$$|\sum_{i,j}a_{ij}x_i^*(x_j)|\leqslant K|\sum_{i,j}a_{ij}s_it_j|. \tag{**}$$

与上面的表征相反，证明 Hilbert 空间有性质(**)并不容易. 这个事实的有趣证明最近才由 Maurey [1], Maurey 和 Pisier [1], Krivine [3]给出.

与 9.12 密切相关的是下面的表征(见 Grothendieck [5], Lindenstrauss 和 Pelczyński [1]).

9.12 可分的 Banach 空间 X 同构于 Hilbert 空间，当且仅当 X 和 X^* 同构于空间 L^1 的子空间，当且仅当 X 和 X^* 同构于 C 的商空间.

在上面定理中如果用"充分大"的空间 L_1 和 L_∞ (定义见 10 节)代替空间 L^1 和 C，则 X 的可分性假设可去掉.

我们指出，每个可分的 Hilbert 空间等距同构于 L^1 的子空间(例如见 Lindenstrauss 和 Pelczyński [1]). 但并不知道 9.2 是否允许等距形式，即使得 X 和 X^* 等距同构于 L^1 的子空间的每个无穷维 Banach 空间 X 是否等距同构于 Hilbert 空间. 这个问题的部分结果见 Bolker [1]. 对 $\dim X<\infty$，答案是否定的(R. Schneider [1]).

由平行四边形等式和归纳法对 $n=2,3,\cdots$ 和 Hilbert 空间的任意元素得

$$2^{-n}\sum_{\varepsilon}\|\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\cdots+\varepsilon_nx_n\|^2=\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2,$$

其中 $\sum_{\varepsilon}$ 表示取遍 ±1 的所有序列 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 的和.下面的 Hilbert 空间的同构表征属于 Kwapień [1]，它与上面的等式有关.

9.13 Banach 空间 X 同构于 Hilbert 空间，当且仅当存在常数 A，使得对任意 $x_1,\cdots,x_n\in X$ 和 $n=2,3,\cdots$，有

$$A^{-1}\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2\leqslant\sum_{\varepsilon}\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_jx_j\|^2\leqslant A\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2.$$

由 9.13 Kwapień [1]推导了 Hilbert 空间的另一个同构表征. 为了叙述它需要另外的记号. 设 $L_0^2(R,X)$ 表示值在 Banach 空间 X，在 R 中有有限 Lebesgue 测度支撑的简单函数组成的赋范线性空间. 对 $f \in L_0^2(R,X)$ 定义 $|f| = (\int_{-\infty}^{+\infty} \| f(t) \|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$. 用 $L^2(R,X)$ 记 $L_0^2(R,X)$ 在范数 $|\cdot|$ 下的完备化. 由经典公式

$$F(f)(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} f(s) ds$$

定义 Fourier 变换 $F: L_0^2(R,X) \to L^2(R,X)$.

在这个记号下有

9.14　对每个完备的 Banach 空间 X，下面的陈述是等价的.

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) 存在常数 $A>0$，使得对任意 $x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n \in X$ 和 $n=1,2,\cdots$，有

$$\sum_{j=-n}^{n} \| x_j \|^2 \leqslant A \int_0^{2\pi} \| \sum_{j=-n}^{n} e^{jit} x_j \|^2 dt ;$$

(iii) 存在常数 $A>0$，使得对任意 $x_{-n},\cdots,x_0,\cdots,x_n \in X$ 和 $n=1,2,\cdots$，有

$$\int_0^{2\pi} \| \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt} x_j \|^2 dt \leqslant A \sum_{j=-n}^{n} \| x_j \|^2 ;$$

(iv) Fourier 变换 $F: L_0^2(R,X) \to L^2(R,X)$ 是有界线性算子.

利用 9.13 Figiel 和 Pisier[1]证明了

9.15　Banach 空间 X 同构于 Hilbert 空间，当且仅当存在常数 $A>0$ 以及同构于 X 的 Banach 空间 X_1 和 X_2，使得 X_1 是一致凸，X_2 是一致光滑，且凸性模和光滑性模对 $t>0$ 满足不等式 $\delta_{X_1}(t) \geqslant At^2$，$\rho_{X_2}(t) \leqslant At^2$.

Meškov [1] 改进了 Sundaresan [1]的结果，他证明

9.16　实 Banach 空间 X 同构于 Hilbert 空间，当且仅当 X 和 X^* 有等价范数，除了 X 和 X^* 的原点以外它都处处二次可微.

算子 $T: X \to Y$ 是核型的，如果存在 $x_j^* \in X^*, y_j \in Y$ $(j=1,2,\cdots)$，满足对 $x \in X$ 有 $\sum_{j=1}^{\infty} \| x_j^* \| \, \| y_j \| < \infty$ 和 $Tx = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x) y_j$. P. Ørno 注意到了这个(见 Johnson, König, Maurey 和 Retherford [1]).

9.17　Banach 空间 X 同构于 Hilbert 空间，当且仅当每个核型 $T: X \to X$ 有可

和的特征值.

Enflo [1]给出 Hilbert 空间的非线性表征.

9.18 Banach 空间 X 同构于 Hilbert 空间，当且仅当 X 一致同胚于 Hilbert 空间 H，即存在同胚 $h:X \underset{\text{onto}}{\rightarrow} H$，使得 h 和 h^{-1} 是在 X 和 H 的范数诱导的距离下的一致连续函数.

第 5 章 古典 Banach 空间

在 Banach 空间中空间 $L^p(\mu)$ 和 $C(K)$ 由它们的正则性质所区别. 但是, 这些性质的大多数如同构和等距特征可推广到某些更广一类空间, 这些空间可借助有限维结构容易定义, 即由给定空间的有限维子空间所要求的某些性质来推广.

定义(Lindenstrauss 和 Pelczyński [1]) 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 和 $\lambda > 1$. Banach 空间 X 是 $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ 空间, 如果对每个有限维子空间 $E \subset X$, 存在有限维子空间 $F \subset X$ 使得 $F \supset E$ 和 $d(F, l_k^p) < \lambda$, 其中 $k = \dim F$. 空间 X 是 $\mathcal{L}_p$ 空间, 只要对某 $\lambda \in (1, \infty)$ 它是 $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ 空间.

类 $\mathcal{L}_p = \bigcup\limits_{\lambda>1} \mathcal{L}_{p,\lambda}$ 是要求的空间类, 它有空间 $L^p(\mu)$ 和 $C(K)$ (对 $p = \infty$)大部分同构性质. 从等距理论的观点, 一个自然类是 $\mathcal{L}_p$ 的子类, 它是由所有对每个 $\lambda > 1$ 是 $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ 的空间 X 组成, 即类 $\bigcap\limits_{\lambda>1} \mathcal{L}_{p,\lambda}$.

5.10 古典 Banach 空间的等距理论

首先, 讨论情形 $1 \leqslant p < \infty$, 它比 $p = \infty$ 简单. 有

10.1 设 $1 \leqslant p < \infty$. Banach 空间 X 等距同构于 $L^p(\mu)$, 当且仅当对每个 $\lambda > 1$, X 是 $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ 空间.

回忆投影 $P: X \to X$ 是压缩的, 如果 $\| P \| \leqslant 1$.

10.2 如果 P 是空间 $L^p(\mu)$ 中的压缩投影, 则对每个 $\lambda > 1$, $Y = P(L^p(\mu))$ 是 $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ 空间.

10.1 和 10.2 的证明归功于许多数学家的共同努力(其历史见 Lacey[1]). 他们本质上都基于 Banach 格表示的下面定理, 这条定理(较少一般形式)是由 Kakutani 和 Bohnenblust 发现的.

回忆, 如果 x 是 Banach 格中的向量, 则 $|x|$ 是由 $\max(x,0) + \max(-x,0)$ 定义.

10.3 设 $1 \leqslant p < \infty$. Banach 格 X 是格等距同构于 Banach 格 $L^p(\mu)$, 当且仅当 $(\| x \|^p + \| y \|^p)^{1/p} = \| x + y \|$, 只要对 $x, y \in X$ 有 $\min(|x|, |y|) = 0$ (如果 $p = \infty$, 则 $(\| x \|^p + \| y \|^p)^{1/p}$ 意味着 $\max(\| x \|, \| y \|)$).

也有(Ando [1])

10.4　如果 X 是 $\dim X \geqslant 3$ 的 Banach 格, 则 X 格等距同构于格 $L^p(\mu)$ 的充分必要条件是 X 的每个真子格是正压缩投影的像.

特别, 如果 $1 \leqslant p < \infty$, 则 $L^p(\mu)$ 的每个可分子空间包含在同构于空间 $L^p(\mu)$ 的空间的子空间内, 且它是压缩投影的像.

对 $1 < p < \infty$, 空间 $L^p(\mu)$ 是自反的(甚至是一致凸和一致光滑). 有

10.5　$(L^p(\mu))^* = L^{p^*}(\mu)$, 其中 $p^* = p/(p-1)$. 这里的等式意味着对 $f \in L^{p^*}(\mu)$ 由 $f \to \int \cdot f d\mu$ 给出典范同构.

这是古典的 Riesz [1]定理的推广(见[B]第 4 章).

定理 10.5 对 $p = 1$ ($p^* = \infty$)在 σ 有限测度情形仍成立. 对任意测度只有下面的事实(例如见 Pelczyński [2]):

10.6　对每个测度 μ, 存在测度 ν (一般它定义在集的另一个 σ 域上)使得空间 $L^1(\mu)$ 和 $L^1(\nu)$ 同构, 且使得映射 $f \to \int \cdot f d\nu$ 是 $L^\infty(\nu)$ 到 $(L^1(\nu))^*$ 的等距同构.

下面的定理是 Grothendieck [2]的:

10.7　如果 X^* 等距同构于空间 $C(K)$, 则 X 等距同构于空间 $L^1(\nu)$.

空间 $L^p(\nu)$ 的等距分类化为测度代数 (S, Σ, μ) 的 Boole 分类. 后者在 σ 有限测度情形相对比较简单, 对此有

10.8　如果 μ 是 σ 有限测度, 则空间 $L^p(\mu)$ 等距同构于有限或无穷积

$$(l^p(A) \times L^p(\lambda^{n_1}) \times L^p(\lambda^{n_2}) \times \cdots)_p,$$

其中 A 是测度 μ 的原子集, $n_1, n_2, \cdots$ 是不同基数序列, 以及 λ^n 表示测度, 它是定义在使得 $\lambda(\{0\}) = \lambda(\{1\}) = \frac{1}{2}$ 的两点集 $\{0,1\}$ 的所有子集域上的测度 λ 的 n 个复制的乘积.

定理 10.8 是 Maharam [1] 意义深远结果的推论, 此结果为, 对某个基数 n, 每个齐次测度代数同构于测度 λ^n 的测度代数.

由 10.8 和 10.4 后面的附注容易得知, 每个可分空间 $L^p(\mu)$ 等距同构于空间 $L^p (1 \leqslant p < \infty)$ 中的压缩投影的像.

现在讨论情形 $p = \infty$.

定义　Banach 空间 X 称为 Lindenstrauss 空间, 如果它的对偶 X^* 等距同构于空间 $L^1(\mu)$.

结合 $C(X)$ 上线性泛函表示的古典 Riesz 定理(证明例如见 Dunford 和 Schwartz [1]以及 Semadeni [2])和定理 10.3 显示所有空间 $C(X)$ 都是 Lindenstrauss 空间. 特

别有趣的是, Lindenstrauss 空间类比 $C(X)$ 空间广泛, 例如, c_0 是 Lindenstrauss 空间, 但它不等距同构于任何 $C(X)$ 空间. 同样如果 S 是 Choquet 单形(定义见 Alfsen [1]), 则在 S 上所有仿射数量函数的空间 $Af(S)$ 是 Lindenstrauss 空间, 故是 11.15 中的空间. 现在叙述几个结果.

10.9　对每个 Banach 空间 X, 下面的陈述等价:

(1) 对每个 $\lambda>1$, X 是 $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ 空间;

(2) X 是 Lindenstrauss 空间;

(3) 第二对偶 X^{**} 等距同构于空间 $C(X)$.

10.10　Lindenstrauss 空间 X 等距同构于空间 $C(X)$, 当且仅当 X 的单位球至少有一个极值点, 且 X^* 的极值点集是 w^* 闭的.

每个空间 $L^\infty(\mu)$ 等距同构于空间 $C(K)$.

下面的定理是 10.2 的类似:

10.11　如果 P 是 Lindenstrauss 空间 X 中的压缩投影, 则 $P(X)$ 是 Lindenstrauss 空间.

应该指出, 不是所有的 Lindenstrauss 空间在压缩投影下都是空间 $C(X)$ 的像 (详细见 Lazar 和 Lindenstrauss[1]). 但是有

10.12(Lazar 和 Lindenstrauss [1])　每个可分的 Lindenstrauss 空间等距同构于空间 $Af(S)$ 中压缩投影的像.

Grothendieck [4]观察到, 在 Banach 空间类中 Lindenstrauss 空间可用线性算子扩张的某些性质刻画, 空间 $L^1(\mu)$ 可用提升线性算子的性质来刻画. 有

10.13　对每个 Banach 空间 X, 下面的陈述等价:

(a1) X 是 Lindenstrauss 空间;

(a2) 对任意 Banach 空间 E,F, 等距同构嵌入 $j:F\to E$, 紧线性算子 $T:F\to X$ 以及 $\varepsilon>0$, 存在紧线性算子 $\tilde{T}:E\to X$, 它是 T 的扩张(即 $T=\tilde{T}j$), 使得 $\|\tilde{T}\|\leqslant(1+\varepsilon)\|T\|$.

(a3) 对任意 Banach 空间 Y,Z, 等距同构嵌入 $j:X\to Y$, 以及紧线性算子 $T:X\to Z$, 存在紧线性算子 $\tilde{T}:Y\to Z$, 使得 $T=\tilde{T}j$ 和 $\|\tilde{T}\|=\|T\|$.

10.14　对每个 Banach 空间 X, 下面的陈述等价:

(a*1) X 等距同构于空间 $L^1(\mu)$;

(a*2) 对任意 Banach 空间 E, 它的商空间 F, 紧线性算子 $T:X\to F$ 和 $\varepsilon>0$, 存在紧线性算子 $\tilde{T}:X\to E$, 满足 $\|\tilde{T}\|\leqslant(1+\varepsilon)\|T\|$, 它提升 T, 即 $T=\phi\tilde{T}$, 其中 ϕ 是 E 到 F 的商映射;

(a*3) 对任意 Banach 空间 Y,Z, 线性算子 $\phi:Y\underset{\text{onto}}{\to}X$, 以及紧线性算子

$T:Z \to X$，存在紧线性算子 $\tilde{T}:Z \to Y$，使得 $\|\tilde{T}\|=\|T\|$ 和 $T=\phi\tilde{T}$.

其他有趣的表征可在 Lindenstrauss [1], [2]中找到.

在(a2), (a3) (对应的(a*2), (a*3))中略去线性算子 T 和 $\tilde{T}$ 是紧的要求, 得到单射(对应的投影)Banach 空间重要类的表征. 它们是 Lindenstrauss 空间(对应的空间 $L^1(\mu)$)的窄子类, 见下面的定理.

回忆紧 Hausdorff 空间 K 称为是*极端不连通的*, 如果 K 中每个开集的闭包是开的.

10.15(Nachbin-Goodner-Kelley)　对每个 Banach 空间 X，下面的陈述等价：

(b1) X 等距同构于空间 $C(K)$，其中 K 极端不连通；

(b2) 对任意 Banach 空间 E,F，等距同构嵌入 $j:E \to F$，以及线性算子 $T:E \to X$，存在线性算子 $\tilde{T}$ 使得 $T=\tilde{T}j$ 和 $\|T\|=\|\tilde{T}\|$；

(b3) X 满足(a2), 其中“紧线性算子”用“线性算子”代替；

(b4) X 满足(a3), 其中“紧线性算子”用“线性算子”代替.

10.16　对每个 Banach 空间 X，下面的陈述等价：

(b*1) X 等距同构于空间 $l^1(S)$；

(b*2) 对任意 Banach 空间 E, 它的商空间 F 和线性算子 $T:X \to F$，存在线性算子 $\tilde{T}:X \to E$ 使得 $\|\tilde{T}\|=\|T\|$ 和 $T=\phi\tilde{T}$，其中 $\phi:E \to F$ 是商映射；

(b*3) X 满足(a*2), 其中“紧线性算子”用“线性算子”代替；

(b*4) X 满足(a*3), 其中“紧线性算子”用“线性算子”代替.

空间 $C(K)$ 的等距分类化为紧 Hausdorff 空间的拓扑分类. 对紧距离空间这个事实已被 Banach 建立(见[B]第 9 章定理 3). 一般结果属于 M. H. Stone [1]和 S. Eilenberg [1]. 叙述如下：

10.17　紧 Hausdorff 空间 K_1 和 K_2 同胚, 当且仅当空间 $C(K_1)$ 和 $C(K_2)$ 等距同构.

D. Amir [1]和 M. Cambern [1] 加强了这个结果：如果存在 $C(K_1)$ 到 $C(K_2)$ 的同构, 使得 $\|T\|\cdot\|T^{-1}\|<2$，则 K_1 和 K_2 同胚. 常数 2 是最好的可能；存在紧距离空间 K_1 和 K_2，使得 $d(C(K_1),C(K_2))=2$ (H. B. Cohen [1]), 但是如果 K_1 和 K_2 是可数紧, 则 $d(C(K_1),C(K_2))\geqslant 3$ (Y. Gordon [1]).

Lindenstrauss 空间的等距分类还不知道. 部分有趣的结果可在 Lindenstrauss 和 Wulbert[1]以及 Lazar 和 Lindenstrauss [1]中找到. 注意空间 c_0 在下面意义下在 Lindenstrauss 空间中是最小的.

10.18(Zippin [1])　每个无穷维 Lindenstrauss 空间 X 都包含等距同构于空间 c_0 的子空间 V. 此外, 如果 X 可分, 则子空间 V 可选择为空间 X 中压缩投影的

像.

可分 Lindenstrauss 空间类允许有最大成员. 更确切地说:

10.19(Pelczyński 和 Wojtaszczyk [1]) 存在可分的 Lindenstrauss 空间Γ, 具有性质: 对每个可分的 Lindenstrauss 空间 X 以及每个$\varepsilon>0$, 存在等距同构嵌入$T:X\to\Gamma$, 满足对$x\in X$有$\|x\|\leqslant(1+\varepsilon)\|x\|$, 且使得$T(X)$是$X$中压缩投影的像.

Wojtaszczyk [1] 证明具有上述性质的空间Γ可令它是通用排列的 Gurariĭ 空间来构造(见 Gurariĭ[1]), 即它有下面性质:

对每对有限维 Banach 空间$F\supset E$, 每个等距同构嵌入$T:E\to\Gamma$和每个$\varepsilon>0$, 存在扩张

$T:F\to\Gamma$ 使得对$e\in E$有$\|e\|\leqslant\|Te\|\leqslant(1+\varepsilon)\|e\|$. ··························(*)

Gurariĭ [1]证明每个满足条件(*)的 Banach 空间是 Lindenstrauss 空间, 以及 Gurariĭ 空间直到殆等距是唯一的, 即如果Γ_1和Γ_2是 Gurariĭ 空间, 则$d(\Gamma_1,\Gamma_2)=1$. Luski [1]证明 Gurariĭ 空间是等距唯一.

读者如果对这一节的内容有兴趣可参考专著 Lacey[1], 它里面还包含其他内容, 主要结果对实标量和复标量都有证明. 许多结果以及关于$C(K)$空间的扩展文献可在 Semadeni[2]中找到. Lindenstrauss 空间与 Choquet 单形的联系见 Alfsen[1]. 进一步的信息可在下面的综合报告中找到: Bernau-Lacey [1], Edwards [1], Lindenstrauss [2], [4], 会议论文集 Swansea [1], 以及文章: Effros [1], [2], [3], Lazar [1], [2], [3], Lindenstrauss 和 Tzafriri [2].

5.11 空间 L^p 的同构理论

$\mathcal{L}_p$空间的同构理论一般比$L^p(\mu)$空间和Lindenstrauss空间的距离理论更复杂. 这个理论距离完全还很远, 许多问题都还没有解决. 只有在情形$p=2$是清楚的. 由 9.7 立刻得知

11.1 Banach 空间X是$\mathcal{L}_2$空间, 当且仅当它同构于 Hilbert 空间.

$\mathcal{L}_p$空间的一般理论的基本定理是属于 Lindenstrauss 和 Rosenthal [1]的下面结果 (回忆对$1<p<\infty$, $p^*=p/(p-1)$; 对$p=1$, $p^*=\infty$).

11.2 设$1\leqslant p\leqslant\infty$且$p\neq2$. 对每个不同构于 Hilbert 空间的 Banach 空间X, 下面的陈述等价:

(1) X是$\mathcal{L}_p$空间;

(2) 存在常数$c>1$, 使得对X的每个有限维子空间E, 存在有限维空间l_n^p, 线性算子$T:l_n^p\to X$, 以及X到$T(l_n^p)$的投影P, 满足对$y\in l_n^p$, $T(l_n^p)\supset E$,

$\|P\| \leqslant c$ 有 $\|y\| \leqslant \|Ty\| \leqslant c\|y\|$；

(3) X^* 同构于空间 $L^{p^*}(\mu)$ 的有补子空间；

(4) X^* 是 $\mathcal{L}_{p^*}$ 空间.

由此得下面推论：

11.3 有

(a) 设 $1 < p < \infty$，X 是不同构于任何 Hilbert 空间的 Banach 空间. 则 X 是 $\mathcal{L}_p$ 空间，当且仅当 X 同构于空间 $L^p(\mu)$ 的有补子空间.

(b) 每个 $\mathcal{L}_1$ 空间(对应的 $\mathcal{L}_\infty$ 空间)同构于 $L^1(\mu)$ 空间(对应的 $L^\infty(\mu)$)的子空间.

(c) 如果 X 是 $\mathcal{L}_1$ 空间(对应的 $\mathcal{L}_\infty$ 空间)，则 X^{**} 同构于空间 $L^1(\mu)$ (对应的 $L^\infty(\mu)$)的有补子空间.

对 $1 < p < \infty$, Hilbert 空间可作为 $L^p(\mu)$ 的可补子空间同构嵌入(由 Rademacher 系 $\{\operatorname{sgn}\sin 2^n \pi t : n = 0,1,\cdots\}$ 张成的 L^p 的子空间，就是一个这样的例子). 另一方面，由 Grothendieck [3]，空间 $L^1(\mu)$ 没有可补子空间同构于无穷维 Hilbert 空间. 这就是为什么假设 X 不同构于任何 Hilbert 空间不出现在(b)和(c)中的理由.

文章 Lindenstrauss and Rosenthal [1]包含 $\mathcal{L}_p$ 空间许多有趣的表征. 这里引用 10.13 和 10.14 的类似. 回忆 Banach 空间 G 称为是单射的，如果对每对 Banach 空间 $Z \supset Y$ 和对每个线性算子 $T: Y \to G$，存在扩展 T 的线性算子 $\tilde{T}: Z \to G$.

11.4　对每个 Banach 空间 X，下面的陈述是等价的：

(1) X 是 $\mathcal{L}_1$ 空间；

(2) 对所有的 Banach 空间 Z 和 Y，以及任何满射线性算子 $\Phi: Z \to Y$，每个紧线性算子 $T: X \to Y$ 有紧提升 $\tilde{T}: X \to Z$ (即 $T = \Phi\tilde{T}$)；

(3) 对所有的 Banach 空间 Z 和 Y，以及任何满射线性算子 $\Phi: Z \to X$，每个紧线性算子 $T: Y \to X$ 有紧提升 $\tilde{T}: Y \to Z$；

(4) X^* 是单射 Banach 空间.

读者如果对用投影的 Boole 代数对 $\mathcal{L}_p$ 空间的表征(属于 Lindenstrauss, Zippin 和 Tzafriri)有兴趣，可参看 Lindenstrauss 和 Tzafriri [2]. 用算子思想的语言的其他表征可在 Retherford 和 Stegall [1], Lewis 和 Stegall [1], 综合报告 Retherford [1] 以及 Gordon, Lewis 和 Retherford [1] 和专著 Pietsch. [1]中找到.

现在讨论 $\mathcal{L}_p$ 空间的同构分类问题. 如果 $1 < p < \infty$，则由 11.3 这个问题化为空间 $L^p(\mu)$ 有补子空间的同构分类问题，在一般情形它也与后面问题密切相关. 后面这个问题仅对 $1 \leqslant p < \infty$ 的 $l^p(S)$ 空间有完全的回答. 有(Pelczyński [3], Köthe [2], Rosenthal [2]).

11.5　设$1 \leqslant p < \infty$. 如果X是空间$l^p(S)$(对应的$c_0(S)$)的有补子空间, 则X同构于空间$l^p(T)$(对应的$c_0(T)$).

为了对所有的$\mathcal{L}_p(1 < p < \infty)$空间分类, 必须刻画$L^p$的所有有补子空间. 这个过程离完成还很远. Lindenstrauss 和 Pelczyński [1]考察了L^p, l^p, $l^p \times l^1$和$E_p = (l^2 \times l^2 \times \cdots)_{l^p}$对$1 < p < \infty, p \neq 2$, 它们都同构于不同的$\mathcal{L}_p$空间. 接下来 Rosenthal [3], [4]发现了$\mathcal{L}_p$空间的不太平凡的例子.

设$\infty > p > 2$. X_p是数列$x = (x(n))$空间, 使得

$$\| x \| = \max([\sum_{n=1}^{\infty} | x(n) |^p]^{1/p}, \quad [\sum_{n=1}^{\infty} | x(n) |^p / \log(n+1)]^{\frac{1}{2}}) < \infty.$$

设$B_p = (B_{p,1} \times B_{p,2} \times \cdots)_{l^p}$, 其中$B_{p,n}$是赋予范数

$$\| x \|_{B_{p,n}} = \max(n^{1/p-1/2}[\sum_{j=1}^{\infty} | x(j) |^2]^{\frac{1}{2}}, \sum_{j=1}^{\infty} | x(j) |^p]^{1/p})$$

的所有平方可和数列的空间.

对$1 < p < 2$, 令$X_p = (X_{p^*})^*$和$B_p = (B_{p^*})^*$.

11.6(Rosenthal)　设$1 < p < \infty, p \neq 2$. 空间X_p, B_p, $(X_p \times X_p \times \cdots)_{l^p}$, $X_p \times E_p$和$X_p \times B_p$都同构于不同的$\mathcal{L}_p$空间, 每一个都不同于L^p, l^p, $l^p \times l^2$, E_p.

取X_p的“L_p张量幂”, Schechtman [1]证明了

11.7　存在无穷多个互不同构的无穷维可分$\mathcal{L}_p$空间$(1 < p < \infty, p \neq 2)$.

Johnson 和 Odell [1]证明

11.8　如果$1 < p < \infty$, 则每个无穷维可分的不包含l^2的$\mathcal{L}_p$空间同构于l^p.

由 11.8 得下面 Johnson 和 Zippin[1]的早期结果.

11.9　设X是无穷维空间L_p, 其中$1 < p < \infty$. 如果X是l^p的子空间或l^p的商空间, 则X同构于l^p.

上面的事实对空间c_0也成立.

现在考虑$p = 1$. 空间$L^1(\mu)$的有补子空间的同构分类问题是$\mathcal{L}_1$空间同构分类非常特殊的情形. 即使在可分情形这些问题也没有得到满意的解决.

与 11.9 相对照, 有

11.10　在l_1的子空间中存在无穷多个同构不同的无穷维$\mathcal{L}_1$空间.

这是由 Lindenstrauss [7]建立的. 他要求l^1的子空间$X_1, X_2, \cdots$的构造是用归纳

法并基于事实每个可分 Banach 空间是 l^1 的线性像. $X_1=\ker h_1$，其中 h_1 是 l^1 到 L^1 的线性算子，以及 $X_{n+1}=\ker h_n$，其中 h_n 是 l^1 到 X_n 的线性算子，$n=2,3,\cdots$.

不知道是否可分空间 $\mathcal{L}_p\ (1\leqslant p<\infty, p\neq 2)$ 的所有同构空间的集合是可数的.

与 11.10 相对照，下面的猜想是很可能的.

猜想　L^2 的每个无穷维有补子空间同构于 l^2 或 L^1.

11.11(Lewis 和 Stegall [1])　如果 X 是 L^1 的无穷维有补子空间，且 X 同构于可分对偶空间的子空间(特别，同构于 l^1 的子空间)，则 X 同构于 l^1.

由此得：

(a) 空间 L^1 不同构于可分对偶 Banach 空间的任何子空间(Gelfand [1], Pelczyński [2]).

(b) 空间 l^1 是(仅到)同构于对偶空间的可分无穷维 $\mathcal{L}^1$ 空间.

(b)的证明由 11.11，11.3(c)以及注意到每个对偶 Banach 空间在它的第二对偶是有补的事实得到.

在不可分情形不知道是不是每个对偶 $\mathcal{L}_1$ 空间同构于空间 $L^1(\mu)$. 也不知道哪个 $L^1(\mu)$ 空间同构于对偶空间. 对 σ 有限测度 μ，$L^1(\mu)$ 同构于对偶空间，当且仅当 μ 是纯原子的(Pelczyński [2], Rosenthal [5]).

现在讨论情形 $p=\infty$. 看上去这最复杂，因为新现象出现在可分和不可分两个情形. 首先，与情形 $1\leqslant p<\infty$ (这时无穷维可分 $L^p(\mu)$ 空间的同构只有两个类型，即 L^p 和 l^p)不同，这时存在无穷多个同构不同的可分无穷维空间 $C(X)$. 这种空间的完全同构分类由下面两个定理给出.

11.12(Milutin [1])　如果 K 是不可数的紧距离空间，则空间 $C(K)$ 同构于空间 C.

对每个可数紧空间 K，令 $\alpha(K)$ 表示第一序数 α，使得 K 的第 α 个导集是空集.

11.13(Bessaga 和 Pelczyński [2])　设 K_1 和 K_2 是可数无穷紧空间，使得 $\alpha(K_1)\leqslant\alpha(K_2)$，则空间 $C(K_1)$ 和 $C(K_2)$ 同构，当且仅当存在正整数 n 使得 $\alpha(K_1)\leqslant\alpha(K_2)\leqslant\alpha(K_1)^n$.

Milutin 的定理 11.12 正面回答了 Banach 的问题(见[B]第 11 章 11.7 后面的附注).

容易证明，如果 X 是可数无穷紧空间，则 Banach 空间 $(C(K))^*$ 同构于 l^1. 因此，由 11.13 存在不可数多个同构不同的 Banach 空间，其对偶是等距同构. 这回答了[B]附注第 11 章 11.9 中的另一个问题.

描述可分空间 $C(K)$ 有补子空间所有同构类型的问题没有解决. 对 c 同构于

c_0(见 11.5)和$C(\omega^{\omega})$(Alspach [1])的回答是知道的. 这个问题可以化为空间C的有补子空间的同构分类问题. 它非常可能是

猜测　对某个可数紧距离空间K, C的每个有补子空间同构于C或$C(K)$.

下面 Rosenthal [6]的结果更加支持了这个猜测.

11.14　如果X是C的有补子空间, 使得X^*是不可分的, 则X同构于C.

Lindenstrauss 空间的同构型类本质上大于$C(K)$有补子空间的同构型类. 有

11.15(Benyamini 和 Lindenstrauss [1])　*存在 Banach 空间BL, 其$(BL)^*$同构于l^1, 且使得BL不同构于任何空间$C(K)$的任何有补子空间.*

事实上, 由 Benyamini 和 Lindenstrauss [1]的构造容易得知, 存在不可数多个同构不同的空间具有上述性质. 结合 11.15 和 10.19, 得到 Gurariĭ 空间Γ也是不同构于任何$C(K)$的任何有补子空间的 Lindenstrauss 空间的一个例子.

Bourgain[1]给出无穷维可分空间$\mathcal{L}_\infty$的显著例子, 它没有子空间同构于c_0, 因此由 10.18 它不同构于任何 Lindenstrauss 空间. 由 Pelczyński [3] 以及 Kadec 和 Pelczyński [1]的结果得

11.16　如果$1 \leqslant p < \infty$, 则每个无穷维空间$\mathcal{L}_p$有有补子空间同构于l^p. $C(K)$的每个无穷维有补子空间都包含同构的空间c_0.

关于可分$\mathcal{L}_\infty$空间的最后的结果是c_0的下面表征.

11.17　每个同构于c_0的 Banach 空间有下面的性质:

如果F是包含等距的E的可分 Banach 空间, 则E在F中有补. ··················(S)

反之, 如果无穷维可分 Banach 空间E有性质(S), 则E同构于c_0.

11.17 的第一部分属于 Sobczyk [1] (简单证明参看 Veech [1]), 第二部分属于 Zippin[3]. Zippin 结果的一个特殊情形, 假设E同构于$C(K)$空间, 是 Amir [2]较早得到的.

现在考虑不可分空间$C(K)$的同构分类问题. 大量不同的不可分空间$C(K)$以及它们各种同构不变量是那样的丰富, 致使几乎没有希望得到不可分空间$C(K)$同构型的任何完全描述, 即使对基数连续统的诸K. 考虑空间$C(K)$的特殊类和它们的有补子空间所得结果. 在一般的猜测中下面的看上去是很有可能的.

猜测　对某个紧全不连通 Hausdorff 空间K_0, 每个$C(K)$空间同构于空间$C(K_0)$.

下面的结果属于 Ditor [1].

11.18　对每个紧 Hausdorff 空间K, 存在全不连通紧 Hausdorff 空间K_0, 连续满射$\phi: K \to K_0$, 以及压缩正投影$P: C(K_0) \underset{\text{onto}}{\to} \phi^0(C(K))$, 其中$\phi^0: C(K) \to C(K_0)$是由$\phi^0(f) = f \circ \phi$定义的等距嵌入, 其中$f \in C(K)$. 因此$C(K)$等距于$C(K_0)$的有

补子空间.

对紧距离空间类似的结果较早由 Milutin [1]得到, 见 Pelczyński [4].

Milutin 11.12 的定理只能推广到不可度量化紧空间的特殊类. 回忆拓扑空间 K 的拓扑权是最小基数 n, 使得存在基数为 n 的 K 的开子集基. 有(Pelczyński [4])

11.19　设 K 是紧 Hausdorff 空间, 它的拓扑权是无穷基数 n. 如果 K 是拓扑群或是距离空间族的积, 则 $C(K)$ 同构于 $C([0,1]^n)$.

特别, 对每个满足 11.19 的紧空间 K, 空间 $C(K)$ 同构于笛卡尔正方形. 这个性质并不与任意无穷紧 Hausdorff 空间共享. 有(Semadeni [1])

11.20　设 ω_1 是第一不可数基数, $[\omega_1]$ 是所有 $\leqslant \omega_1$ 的基数的空间, 其中自然拓扑由序确定, 则空间 $C([\omega_1])$ 不同构于它的笛卡尔正方形.

许多数学家研究单射空间(它的定义已经在前面 11.4 给出过). 由 Nachbin 的定理 10.15, Goodner 和 Kelley 建议下面的

猜测　对某个极端不连通紧 Hausdorff 空间 K, 每个单射 Banach 空间同构于空间 $C(K)$.

容易看到: (1) 每个单射空间的有补子空间是单射的; (2) 每个空间 l^∞ 是单射的; (3) 每个 Banach 空间是单射的, 当且仅当它在每个包含它的同构 Banach 空间中是有补的; (4) 每个 Banach 空间 X 等距同构于空间 $l^\infty(S)$ 的子空间, 其中 S 是 X^* 的单位球. 由上面的说明得

11.21　Banach 空间 X 是单射的, 当且仅当它等距同构于空间 $l^\infty(S)$ 的有补子空间.

Lindenstrauss [3]证明了(见 11.5)

11.22　l^∞ 的每个无穷维有补子空间(对可数无穷集 S 它等于 $l^\infty(S)$)同构于 l^∞.

作为这个定理的推论, 得到下面早先由 Grothendieck [3]得到的结果.

11.23　每个可分的单射 Banach 空间是有限维空间.

定理 11.22 不可能推广到不可数集 S 的空间 $l^\infty(S)$. 事实上, 有

11.24(Akilov [1])　对每个测度 μ, 空间 $L^\infty(\mu)$ 是单射的.

11.25(Pelczyński [3], [5], Rosenthal [5])　设 μ 是 σ 有限测度, 则空间 $L^\infty(\mu)$ 同构于 $l^\infty(S)$, 当且仅当测度 μ 是可分的(即空间 $L^1(\mu)$ 是可分的).

定理 11.24 与下面的事实密切相关.

11.26　(a) 同构于对偶空间的 $\mathcal{L}_\infty$ 空间是单射的;

　　(b) 单射双偶空间同构于 $L^\infty(\mu)$.

11.26(a)由 11.4 (4)得到, 因为由 Dixmier [1], 每个对偶 Banach 空间在它的第

二对偶中是有补的. 11.26 (b)属于 Haydon [1].

应用 Solovay 和 Gaifman 关于完全 Boole 代数的深入结果, Rosenthal [5]证明了

11.27 存在不同构于任何对偶 Banach 空间的单射 Banach 空间.

注意到, Isbell 和 Semadeni [1]证明了

11.28 存在不是极端不连通的紧 Hausdorff 空间 K，且使得 $C(K)$ 是单射的.

在结束这一节时, 最后猜测的"对偶问题"已经完全解决了. 就是说(见 10.16)有

11.29(Köthe [2]) 对每个 Banach 空间 X，下面的陈述等价：

(1) X 是投影的, 即对每对 Banach 空间 E,F，和每个线性满射 $h:F\to E$，以及每个线性算子 $T:X\to E$，存在线性算子 $\tilde{T}:X\to F$，它提升 T，即 $h\tilde{T}=T$；

(2) X 同构于空间 $l^1(S)$.

对这一节讨论的问题有兴趣的读者可参考 Lindenstrauss 和 Tzafriri [1], [2], Semadeni [2], Bade [1], Pelczyński [4]与 Ditor [1], Lindenstrauss [2], [4], Rosenthal [9], 以及上面所述的书和文章中的参考文献, 也可看"附加证明".

5.12 空间 $L^p(\mu)$的同构结构

这一节讨论的出发点是[B]的第 12 章. 将讨论下面的问题：

I. 给定$1\leqslant p_1<p_2<\infty$. 什么样的 Banach 空间 E 同时同构于 L^{p_1} 的子空间和 L^{p_2} 的子空间?

更一般可问：

II. 哪个 Banach 空间 X 同构于所给空间 $L^p(\mu)$ 的子空间?

这方面的一个基本结果是这个综合报告的定理 3.2, 它可重述如下：

12.1 Banach 空间 E (等距)同构于空间 $L^p(\mu)$ 的子空间, 当且仅当 E 在 l^p 中是局部(等距)同构可表示的.

限于讨论情形$1\leqslant p<\infty$ 和 E 是可分的 Banach 空间. 由于空间 $L^p(\mu)$ 的每个可分子空间等距同构于 L^p 的子空间, 后面将研究空间 L^p 的同构性质. 情形 $2<p<\infty$ 比 $1\leqslant p<2$ 简单得多. 下面的概念对讨论有用.

定义 设$1\leqslant p<\infty$. 称空间 L^p 的子空间 E 是 l^p 的标准像, 如果存在同构 $T:l^p\underset{\text{onto}}{\to}E$ 和 $U:L^p\underset{\text{onto}}{\to}L^p$，使得对 $n\neq m$ $(n,m=1,2,\cdots)$，函数 $UT(e_n)$ 和 $UT(e_m)$ 支撑的交有零测度, 其中 e_n (对 $n=1,2,\cdots$) 表示空间 l^p 中的第 n 个单位向量.

空间 L^p 的子空间 E 称为稳定, 如果它在测度收敛的拓扑下是闭的, 即对 E 元

素的每个序列 (f_n)，由条件 $\lim_n \int_0^1 |f_n(t)|/(1+|f_n(t)|)dt = 0$ 得 $\lim_n \|f_n\|_p = 0$.

容易看出

12.2　(a) L^p 中的每个函数序列有两两不相交支撑张成 l^p 的标准像；

(b) l^p 的每个标准像在 L^p 中有补.

更深入的, 特别对 $1 \leqslant p < 2$ 是下面结果, 它显示稳定的 L^p 的子空间的性质不依赖于子空间在这空间中的定位.

12.3　设 $1 \leqslant p < \infty$ 和 $p \neq 2$，则对空间 L^p 的每个无穷维子空间 E，下面的陈述是等价的：

(1) E 是稳定的；

(2) E 没有子空间是 l^p 的标准像；

(3) E 没有子空间同构于 l^p.

此外, 如果 $p > 1$，条件(1)~(3)等价于下面所述的条件：

(4) 存在 $q \in [1, p)$ 和常数 C_q，使得

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q \leqslant C_q \|f\|_p, \quad \text{对 } f \in E; \tag{*}$$

(5) 对每个 $q \in [1, p)$ 存在 C_q 使得(*)成立.

最后这个定理对 $p > 2$ 是属于 Kadec 和 Pelczyński [1], 对 $1 \leqslant p < 2$ 属于 Rosenthal [7]. 下面 Kadec 和 Pelczyńki [1]的结果是 12.3 的直接推论.

12.4　设 E 是空间 L^p $(2 < p < \infty)$的无穷维子空间, 则 E 是稳定的, 当且仅当 E 同构于 Hilbert 空间.

假设 $2 < p < \infty$，E 同构于 Hilbert 空间的 L^p 的子空间, 则由 12.4 和条件 12.3 (5), 其中 $q = 2$，L^p 到 E 上的正交(关于 L^2 中的内积)投影作为从 L^p 到 L^p 的算子是连续的. 因此, 由 12.3 (2) 和 12.2 (b), 得到

12.5　设 $2 < p < \infty$，E 是 L^p 的子空间, 则：

(a) 如果 E 同构于 Hilbert 空间, 则 E 在 L^p 中有补.

(b) 如果 E 不同构于任何 Hilbert 空间, 则 E 包含有补子空间同构于 l^p.

下面的结果属于 Johnson 和 Odell [1].

12.6　假设 E 是空间 L^p 的子空间, 其中 $2 < p < \infty$，则 E 同构于 l^p 的子空间, 当且仅当 E 没有子空间同构于 Hilbert 空间.

12.6 中的假设 $p > 2$ 是本质的. 对满足 $1 \leqslant p < 2$ 的 p，存在 L^p 的子空间 E 不同构于 l^p 的任何子空间, 且 E 没有无穷维子空间是稳定的(Johnson 和 Odell [1]).

现在来讨论情形 $1 \leqslant p < 2$. 这时存在空间 L^p 的许多同构不同的稳定子空间.

重要的事实是下面的定理，它让我们回到 P. Levy [1]，但用 Banach 空间的语言叙述它还是很远的事(对 l^q 是由 Kadec [4]，以及对一般情形是由 Bretagnolle, Dacunha-Castelle 和 Krivine [1] 以及 Lindenstrauss 和 Pelczyński [1]讨论的).

12.7 如果$1 \leqslant p < q \leqslant 2$，则空间 L^p 包含等距同构于 L^q 的子空间 E_q .

12.7 的证明应用了概率论技巧. 它的思想如下：

1. 对满足$1 < q \leqslant 2$ 的每个 q，存在随机变量(=可测函数) $\xi_q : R \to R$，它有特征函数

$$\hat{\xi}_q(s) = \int_R \exp(\xi_q(t) \cdot is)dt = \exp(-|s|^q),$$

且使得对每个 $p < q$ 有 $\xi_q \in L^p(R)$. 这里用 $L^p(R^n)$ 记空间 $L^p(\lambda)$，其中 λ 是 R^n 的 n 维 Lebesgue 测度.

2. 设 $\xi_{q1}, \cdots, \xi_{qn}$ 是独立随机变量，它们每个的分布与 ξ_q 的相同，例如设 $\xi_{qj} \in L^p(R^n)$ 是由 $\xi_{qj}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \xi_q(t_j)$ 定义. 假设 $c_1, \cdots, c_n$ 是满足 $\sum_{j=1}^{n} |c_j|^q = 1$ 的实数，令 $\eta = \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_{qj}$，由于随机变量 $\xi_{q1}, \cdots, \xi_{qn}$ 独立且有相同的分布，因此与 ξ_q 有相同的特征函数，于是有

$$\hat{\eta}(s) = \sum_{j=1}^{n} c_j \hat{\xi}_{qj}(s) = \sum_{j=1}^{n} \exp(-|sc_j|^q)$$
$$= \exp(-|s|^q \cdot \sum_{j=1}^{n} |c_j|^q) = \exp(-|s|^q) = \hat{\xi}_q(s).$$

因此η 与 ξ_q 有相同的分布，从而对每个满足$1 \leqslant p < q$ 的 p，有

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_{pj} \right\|_p = \|\eta\|_p = \|\xi_q\|, \quad \text{如果 } \sum_{j=1}^{n} |c_j|^q = 1. \tag{*}$$

3. 由(*)，由 $T(c_1, \cdots, c_n) = \|\xi\|_p^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_{qj}$ 定义的线性算子 $T : l_n^p \to L^p(R^n)$ 是等距嵌入，因此 L^q 在 l^p 中局部可表示. 应用 12.1 就完成了证明.

由 Banach[B]12 章定理 10，以及空间 l^1 不是自反的事实，得知如果$1 \leqslant p < q \leqslant 2$，则 l^p 不同构于 L^q 的任何子空间. 因此由 12.3, 12.7 的子空间 E_q 稳定.

定理 12.7 可推广如下(Maurey [1])：

12.8　设$1\leqslant p<q\leqslant 2$，则对每个测度$\mu$，存在测度$\nu$使得空间$L^q(\mu)$等距同构于空间$L^p(\nu)$的子空间.

Rosenthal [7]发现了L^p稳定子空间的另一个性质，它可称为外推性质.

12.9　如果$1\leqslant p<\infty$，$p\neq 2$，E是空间L^p的稳定子空间，则存在L^p到它自己的同构U和$\varepsilon>0$，使得$U(E)$是空间$L^{p+\varepsilon}$的闭稳定子空间，即存在$C>0$，使得对每个$f\in E$有$\|f\|_p\leqslant\|f\|_{p+\varepsilon}\leqslant C\|f\|_p$.

比较 12.9 与 Kadec 和 Pelczyński [1]的结果得到

12.10　L^1的每个非自反子空间都包含l^1的标准像，有下面的

12.11(Rosenthal[7])　L^1的每个自反子空间都稳定，因此同构于L^p的子空间，其中某$p>1$.

[B]第 12 章的结果以及 Orlicz [2], Satz [2]结合 12.3, 12.4 和 12.7，得到这一节开始叙述的问题(I)和[B]12 章的问题的回答，有

12.12　设E是无穷维 Banach 空间，$1\leqslant p<q<\infty$. E同构于L^p的子空间和L^q的子空间，当且仅当E同构于$L^{\min(p,2)}$的子空间. 特别，如果$q\leqslant 2$，则$\dim_l L^p\geqslant\dim_l L^q\geqslant\dim_l l^q$，且如果$p\neq 2<q$，则$\dim_l L^p$与$\dim_l L^q$和$\dim_l l^q$是不可比较的.

对$2<p<q$，L^p和l^q的线性维数是不可比较的事实是由 Paley [1]第一个建立的. $\dim_l L^p$与$\dim_l L^q$对$q>2>p$的不可比较性属于 Orlicz [2]. 对$1<p<\infty$，$p\neq 2$，存在L^p的子空间同构于l^p但不是l^p的标准像. 这是下面 Rosenthal [3], [8], 以及 Bennett, Dor, Goodman, Johnson 和 Newman [1]的定理的推论.

12.13　如果$1<p<\infty$或者$p\neq 2$，则存在l^p的不可补子空间同构于整个空间.

不知道是否同构于l^1的l^1的每个子空间在整个空间有补.

由 12.7 和对$p\neq q$没有l^p的子空间同构于l^q的事实得知，12.5(b)中的假设$p>2$是绝对必要的. 下面的结果与 12.5(a)有关：

12.14　(a) 设$1<p<2$，并设E是空间L^p的无穷维子空间. 如果E同构于 Hilbert 空间，则E包含无穷维子空间，它在L^p中有补.

(b) 如果$1\leqslant p<\infty, p\neq 2$，则存在$L^p$的没有补的子空间同构于 Hilbert 空间.

(a)这部分是属于 Pelczyński 和 Rosenthal [1], (b)部分对$1\leqslant p\leqslant 4/3$属于 Rosenthal[8], 对满足$1\leqslant p<2$的所有$p$属于 Bennett, Dor, Goodman, Johnson 和 Newman.

与[B]中 12 章的表(性质 15)相联系，注意到(见 Pelczyński [3]和 5.2)

12.15 如果$1 \leqslant p < \infty, p \neq 2$，则存在$l^p$的无穷维闭线性子空间不同构于整个空间.

下面 Johnson 和 Zippin [1]的定理给出空间l^p具有逼近性质的子空间的描述.

12.16 如果E是空间$l^p(1 < p < \infty)$的子空间，且E有逼近性质，则E同构于积空间$(G_1 \times G_2 \times \cdots)_{l^p}$的有补子空间，其中诸$G_n$是空间$l^p$的有限维子空间.

第 6 章

6.13 线性距离空间的拓扑结构

[B]附注第 11 章 11.4 的内容是深入研究线性距离空间和它们子集的拓扑结构的催化剂. 这些研究导致下面的定理.

13.1 ANDERSON-KADEC 定理：每个无穷维可分局部凸复线性距离空间同胚于 Hilbert 空间 l^2.

这个结果完美回答了在[B]附注第 11 章 11.4 所提的问题, 并证明空间 s 不同胚于任何 Banach 空间的论述是错误的([B]附注第 4 章 4.1). 因此 13.1 是结合 Kadec [11], [12], Anderson [1] 以及 Bessaga 和 Pelczyński [5], [6]工作的产物. 另外的修改证明见 Bessaga 和 Pelczyński [7]以及 Anderson 和 Bing [1]. 早期的部分结果可在 Mazur [1], Kadec [6], [7] , [8] , [9] , [10], Kadec 和 Levin [1], Klee [1], Bessaga [1]中找到.

在 13.1 以及关于线性距离空间同胚结果的其他证明中用了三个技巧：

A. Kadec 的坐标接近 空间 X 和 Y 之间的同胚是用有相同"坐标"的对应点 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 的方法建立的."坐标"是按适当选取空间的一致凸范数(见 1.9 后面的定义)在距离术语下定义的.

B. 分解方法 这个方法是将讨论中的空间表示为无穷乘积, 并执行由 Borsuk [1]开创的在积中的适当"代数计算"(见[B]第 11 章 11.7 定理 6-8)所组成. 为了叙述某些结果, 回忆拓扑因子的定义. 设 X 和 Y 是拓扑空间, 称 Y 是 X 的因子(记为 $Y \mid X$), 如果存在空间 W 使得 X 同胚于 $Y \times W$. 一个典型结果的得到是利用分解方法的下面准则, 它属于 Pelczyński [5], [6]:

13.2 设 X 和 H 分别是 Banach 空间和无穷维 Hilbert 空间, 它们都有相同的拓扑权, 则 $H \mid X$ 导致 X 同胚于 H .

13.2 的许多应用依赖于下面的 Bartle 和 Graves[1]的结果(简单证明与推广也见 Michel [1],[2],[3]).

13.3 设 X 是 Banach 空间, Y 是 X 的闭线性子空间或商空间, 则 $Y \mid X$.

注意, 13.2 和 13.3 在 X 仅假设是局部凸完备线性距离空间下仍成立.

同样, Toruńczyk [3], [4], [5]的下面的结果以及它的某些推广给了分解方法的一些应用.

13.4　如果 X 是 Banach 空间，A 是距离空间的绝对收缩核，它可拓扑嵌入为 X 的闭子集，则 $A|(X\times X\times\cdots)_{l^2}$．如果 H 是无穷维 Hilbert 空间，A 是距离空间的完全绝对收缩核且 A 的拓扑权小于或等于 E 的拓扑权，则 $A|H$．

C. 吸收技巧　当 X 和 Y 已经知道是同胚时，这个方法对建立偶 (X,E) 和偶 (Y,F) 之间的同胚可给出抽象的框架，这些偶是由距离空间和它们的子集组成(说偶 (X,E) 和偶 (Y,F) 同胚，用符号记为 $(X,E)\sim(Y,F)$，如果存在 X 到 Y 的同胚 h，它将 E 变到 F，因此将 $X\setminus E$ 变到 $X\setminus F$)．对指定的同胚到 R^∞ 的具体空间的特殊模型的设计可简单地描述如下．考虑 Hilbert 立方体 $Q=[-1,1]^\infty$ 以及它的伪内部 $P=(-1,1)^\infty$，显然它同胚于 R^∞．由此得知每个使得 $(Q,A)\sim(Q,Q\setminus P)$ 的子集 $A\subset Q$ 可用含有映射的扩张和逼近的某个性质以及关于 Anderson [2]称为冠(对紧吸收性质)的 Z 集理论来刻画．因此，为了证明距离空间 E 同胚于 R^∞，只需将 E 表为同胚于 Q 的空间 X 的子集，故补 $X\setminus E$ 有冠．较方便的是对 Hilbert 立方体有许多模型应用这个技巧．下面属于 Keller[1]的经典定理，以及 Klee [4]的附注在这方面起了重要的作用．

13.5　Hilbert 空间 l^2 的每个无穷维紧凸子集同胚于 Hilbert 立方体．

13.6　任何局部凸线性距离空间的每个紧凸子集仿射嵌入 l^2．

对这里叙述的模型和收缩技巧的其他模型的更详细考虑可见文章 Anderson [4], Bessaga 和 Pelczyński [8], [7], [9], Toruńczyk [2]以及书 Bessaga 和 Pelczyński [10]的第 IV, V, VI, VIII 章．对“收缩”最一般的公理方法的各种应用在 Toruńczyk [2]以及 Geoghegan 和 Summerhill[1]中有叙述．

在 1966~1977 期间有几个作者试图将 Kadec-Anderson 定理推广到任意拓扑权的 Banach 空间，有关信息见 Bessaga 和 Pelczyński [1]，第 7 章，以及 Toruńczyk [5], Terry [1]．最后的解最近才被 Toruńczyk [6]得到，他证明了

13.7　设 X 是完备的距离空间，它对距离空间绝对收缩，并设 $\aleph=\omega X$ 为 X 的密度特征，则 X 同胚于 Hilbert 空间 $l_2(\aleph)$，当且仅当下面条件满足：

(a)　$X\times l_2$ 同胚于 X，

(b)　X 的满足 $\omega A<\aleph$ 的每个闭子集 A 是 Z 集，即对每个紧 $K\subset X$，K 到 X 的恒同嵌入是 K 到 $X\setminus A$ 的连续映射序列的一致极限．

特别地，

13.8　每个局部凸完备的线性距离空间同构于 Hilbert 空间．

详细证明和 Hilbert 空间的其他表征，以及 Hilbert 空间流形可在 Toruńczyk [6]中找到．

自然要问在 Anderson-Kadec 定理 13.1 中的局部凸性假设是不是本质的．这个问题还没有解决，仅在非常特殊的非局部凸空间知道是同胚于 l_2．例如见 Bessaga

和 Pelczyński [9]:

13.9 空间 S ([B]引言 B.7)同构于 l^2. 更一般, 如果 X 是至少有两个不同点的可分完备的距离空间, 则在(Lebesgue)测度下有收敛性拓扑的所有 Borel 可测映射 $f:[0,1]\to X$ 的空间 M_X 同胚于 l^2.

更多的例子在 Bessaga 和 Pelczyński [10]第 6 章有叙述.

不完备赋范线性空间不能同胚于任何 Banach 空间. 这容易由 Mazur 和 Sternbach [1]的定理得到, 这定理说Banach空间的每个 G_δ 线性子空间必须是闭的, 存在至少 $\aleph_1$ 个拓扑不同的可分赋范线性空间可由它们的绝对Borel型来区分(Klee [5], 以及Mazur—未发表). Henderson和Pelczyński 证明即使在 σ 紧赋范线性空间中也至少有 $\aleph_1$ 个拓扑不同(见 Bessaga 和 Pelczyński [10], 第 8 章 8.5)的上述空间.

不知道是否每个赋范线性空间都同胚于内积空间.

利用适当的收缩模型可以证明(Bessaga 和 Pelczyński [8]以及[10], 第 8 章 8.5, Toruńczyk [2])

13.10 如果 X 是无穷维赋范线性空间, 它是它的有限维紧子集的可数并, 则 X 同胚于由至多有有限个非零坐标的所有序列组成的 R^∞ 的子空间 ΣR. 如果 X 是包含无穷维紧凸子集的 σ 紧赋范线性空间, 则 X 同构于 Hilbert 立方体的伪边界 $Q\setminus P$.

关于不完全线性距离空间分类的更详细信息读者可参看 Bessaga 和 Pelczyński [10]的第 8 章以及那里的参考文献.

另一个有趣的问题是寻找给定无穷维 Banach 空间的子集是同胚于整个空间. 这个问题与有限维情形完全不同. 例如

13.11 设 X 是无穷维 Banach 空间, 则 X 下面的子集类同胚于整个空间:

(i) 球.

(ii) 任意闭凸体(=有非空内点的闭凸集), 特别, 闭球, 闭半空间, 两个半空间之间的带, 等等.

(iii) 集合 $X\setminus A$, 其中 A 是 σ 紧.

这个结果对空间 l^2 和几个其他空间已由 Klee [3], [6]得到. 一般情形可将 X 因子分解为同胚于 l^2 的可分空间并利用某些附加结构而化为 l^2 的问题. 见 Bessaga 和 Pelczyński [10], 第 6 章.

线性距离空间拓扑结构的研究促进无穷维流形理论的发展. 如果 E 是线性距离空间, 则 E 上的拓扑流形模拟(简记 E 流形), 是指可度量化的拓扑空间 M 有同胚于 E 的开子集的集的开覆盖. 同样可在 Hilbert 立方体上定义流形模拟.

具有固定模型 E 的, 即满足某些条件的无穷维线性距离空间流形的拓扑分类的基本定理是属于 Henderson (见 Henderson [1],[2]以及 Henderson 和 Schori[1]). 为

简单起见，在 Hilbert 空间情形叙述这个定理.

13.12　设 H 是无穷维 Hilbert 空间，则每个连通的 H 流形同胚于 H 的开子集. H 流形 M_1 和 M_2 同胚，当且仅当它们是相同的同伦型，即存在连续映射 $f: M_1 \to M_2$ 和 $g: M_2 \to M_1$，使得合成 gf 和 fg 分别同伦于恒同 id_{M_1} 和 id_{M_2}.

对无穷维微分流形的类似结果见 Burghelea 和 Kuiper [1], Eells 和 Elworthy [1], Elworthy [1], Moulis [1].

Hilbert 立方体上流形模拟的系统理论已被 Chapman [2], [3], [4], [5]所发展，且与多面体的简单同伦理论紧密相联(Chapman [5], [6], 参看 Cohen [1]的附录)，并与 Borsuk 的形状理论有些共同点(Chapman [1]). Chapman [7]是最好的信息来源.

用 Banach 空间关于一致同胚分类的某些注释结束这一节. Banach 空间 X 和 Y 是**一致同胚**，如果存在同胚 $f: X \underset{\text{onto}}{\to} Y$，使得 f 和 f^{-1} 都一致连续.

存在不同构但一致同胚的 Banach 空间(Aharoni 和 Lindenstrauss [1]). 但是，Enflo [1]证明一致同胚于 Hilbert 空间的 Banach 空间已是同构于 Hilbert 空间了(见 9.13).

结合 Lindenstrauss [10]和 Enflo [5]的结果，得到

13.13　如果 $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$，则对任意测度 μ 和 ν，空间 $L^p(\mu)$ 和 $L^q(\nu)$ 不一致同胚，除了情形 $\dim L^p(\mu) = \dim L^q(\nu) < \infty$.

为了叙述下面的结果(属于 Lindenstrauss [10])，回忆距离空间 M 的闭子空间 S 称为是 M 的**一致收缩**，如果存在一致连续映射 $r: M \to S$，使得对 $x \in S$ 有 $r(x) = x$.

13.14　如果 Banach 空间 X 的线性子空间 Y 是 X 的一致收缩，且 $x(Y)$ 在 Y^{**} 中有补，则 Y 在 X 中有补.

注意到，如果 Y 是自反的，或者更一般地，共轭于 Banach 空间，则 $x(Y)$ 在 Y^{**} 中有补(见 Dixmier [1]).

另一方面，有(见 Lindenstrauss [10])

13.15　设 K 是紧距离空间，则任意距离空间 M 中 $C(K)$ 的每个等距像是 M 的一致收缩.

结合 13.14 和 13.15，以及 Grothendieck [3]关于没有可分无穷维共轭 Banach 空间在 $C(K)$ 中有补的结果(参考 Pelczyński [3])，得到

13.16　如果 K 是无穷维紧距离空间，则空间 $C(K)$ 不一致同胚于任何共轭的 Banach 空间.

Enflo [6]证明了

13.17　Hilbert 空间没有子集一致同胚于空间 C.

在"附加证明"中我们叙述 Aharoni 和 Ribe 的 Banach 空间关于一致同胚分类工作的贡献.

局部凸完备距离空间的一致同胚被 Mankiewicz [1], [2]研究过, 也可见 Bessaga [1], §11. 特别, Mankiewicz [2]证明了

13.18 如果 X 是空间 l^2, s, $l^2\times s$ 之一, Y 是一致同胚于 X 的局部凸线性距离空间, 则 Y 同构于 X.

从 13.18 立刻得到 s 不一致同胚于 l_2 (更一般的事实在 Bessaga [1], 282 页有证明).

6.14 附 加 证 明

Ad 2.2 在 Banach 空间的同构理论中下面的基本事实属于 H. P. Rosenthal, 它与这篇综合论文的第 9 章 9.9 和 9.3 的例子 2 的讨论有关.

14.1 设 (x_n) 是 Banach 空间中的有界序列, 则 (x_n) 包含子序列等价于 l^1 的标准向量基的充分必要条件是 (x_n) 有子序列而没有弱 Cauchy 序列的子序列.

这个定理对实 Banach 空间的证明见 Rosenthal [11]; Dor [1]改进了 Rosenthal 的证明并涵盖了复空间. 对更精致的有关结果读者可参看综合论文 Rosenthal [12] 和论文 Odell 和 Rosenthal[1]以及 Bourgain, Fremlin 和 Talagrand [1].

关于 *WCG* 空间和重赋范问题的进一步信息, 读者可参考 Diestel 的讲义[1]以及 Diestel 和 Uhl 的书[1].

Ad 2.3 定理 13.7 和 13.8 可推广到任意 $p\in(1,\infty)$ 的情形. 对此有

14.2 (Krivine[2]) 设 $1<p<\infty$, 则 l^p 在 Banach 空间 X 局部可表示, 当且仅当对某个 $a\geqslant 1$, l^p 在 X 中局部 a 可表示.

14.2 的另外证明见 Rosenthal [10].

利用 14.2, Maurey 和 Pisier [3]建立了

14.3 设 X 是 Banach 空间, pX (相应的 qX) 是 $p\in[1,\infty]$ 的上确界(相应的下确界), 使得存在正数 $C=C(q,X)<\infty$, 对元素的每个有限序列 (x_j), 有性质

$$\int_0^1\|\sum_j r_j(t)x_j\|\,dt\leqslant C(\sum_j\|x_j\|^q)^{1/q}$$

$$\text{(相应的, }\int_0^1\|\sum_j r_j(t)x_j\|\,dt\geqslant C(\sum_j\|x_j\|^q)^{1/q}\text{)},$$

其中 (r_j) 是 Rademacher 函数, 则 l^{pX} 和 l^{qX} 在 X 局部可表示.

注意到$1 \leqslant pX \leqslant 2$和$\infty \geqslant qX \geqslant 2$ (不等式的右端由 Dvoretsky 的定理得知). 在极限情形$pX = 1$(相应的$qX = \infty$), 定理 14.3 导致 3.8 (i)和(iv)等价(相应的 3.7).

l^1局部可表示性的完全不同准则是由 Milman 和 Wolfson [1]发现的.

14.4　设X是无穷维 Banach 空间, 它具有性质: 存在$C < \infty$, 使得对每个$n = 1, 2, \cdots$, 存在X的n维子空间E_n满足$d(E_n, l_n^2) \leqslant C\sqrt{n}$, 则$l^1$在$X$中是局部可表示的.

Ad 2.4　R. C. James [14] 利用构造 2 型非自反 Banach 空间, 即对$q = 2$满足 13.8(iv)的非自反 Banach 空间改进了 4.3.

对 2.4 讨论的主题有兴趣的读者可参考下列书与注释: Lindenstrauss 和 Tzafriri [1], vol.II, Maurey 和 Schwartz [1] (由 Maurey, Maurey 和 Pisier, 以及 Pisier 的各种表述), Diestel [1], 以及文章 Figiel [6], [7],[8], 和 Pisier [2].

Ad 3.5　14.5 (Szankowski[4])　从l^2到它自己的所有有界线性算子的空间没有逼近性质.

Ad 3.8　下面属于 Maurey 和 Rosenthal [1]的结果与是否每一个无穷维 Banach 空间都包含具无条件基的无穷维子空间的问题有关.

14.6　存在包含弱收敛于零的范数 1 向量序列的 Banach 空间, 使得这个序列没有无穷子序列组成无条件基张成子空间.

Ad 4.9　Enflo, Lindenstrauss 和 Pisier 的文章[1]包含不同构于 Hilbert 空间但有子空间Y,使得Y和X/Y等距同构于l^2的 Banach 空间的例子(也见 Kalton 和 Peck [1]).

Ad 5.10、5.11　建议读者参考综合文章 Rosenthal [9], [12], 也可参考 Diestel 和 Uhl[1].

关于空间$C(K)$的大部分近代工作是考虑不可分空间$C(K)$. 读者可参看 Alspach 和 Benyamini [1], Argyros 和 Negropontis [1], Benyamini [2], Dashiell [1], Dashiell 和 Lindenstrauss [1], Ditor 和 Haydon [1], Etcheberry [1], Hagler [1], [2], Haydon [1], [2], [3], [4], Gulko 和 Oskin [1], Kislyakov [1], Talagrand [1], Wolfe [1]. 可分空间 $C(K)$在文章 Alspach [1], Benyamini [1], Billard [1], Zippin [1]中有研究.

Ad 5.12　对这个课题有兴趣的读者应该参考 Maurey 和 Schwartz [1]的讨论班讲义, 以及 Johnson, Maurey, Schechtman 和 Tzafriri [1]的论文集. 也可参考 Rosenthal [9]的综合文章以及论文 Alspach, Enflo 和 Odell [1], Enflo 和 Rosenthal [1], Enflo 和 Starbird [1], Gamlen 和 Gaudet[1], Stegall [1], [2].

Ad 6.13　Ribe [1]下面的结果证明除了在 6.13 由 Aharoni 和 Lindenstrauss [1]指出的例子, 关于一致同胚的 Banach 空间的分类“接近于”线性拓扑分类.

14.7　如果 Banach 空间X和Y是一致同胚, 则存在$a \geqslant 1$, 使得X在Y中局部

a可表示，且Y在X中局部a可表示.

但我们知道(Enflo 口头交流)，显然空间L^1和l^1彼此在另一个局部可表示，但不一致同胚. 另一方面，同构不同的 Banach 空间可有相同的“一致维数”.

14.8(Aharoni [1]) 存在常数K，使得对每个可分的距离空间(X,d)，存在映射$T:X\to c_0$，对每个$x,y\in X$满足条件$d(x,y)\leqslant\|Tx-Ty\|\leqslant Kd(x,y)$，因此每个可分的 Banach 空间一致同胚于$c_0$的有界子集.

14.9(Aharoni[2]) 对$1\leqslant p\leqslant 2,1\leqslant q<\infty$，$L^p$一致同胚于$l^q$的子集，即存在子集$Z\subset l^q$和同胚$f:L^p\to Z$，使得$f$和$f^{-1}$一致连续. 此外，$L^p$一致同胚于它自己的有界子集.

文　献

G. P. Akilov

[1] On the extension of linear operations, Dokl. Akad. Nauk SSSR (1947), pp. 643-646 (Russian).

Freda E. Alexander

[1] Compact and finite rank operators on subspaces of l_p, Bull. London Math. Soc. 6 (1974), pp. 341-342.

E. Alfsen

[1] Compact convex sets and boundary integrals, Springer Verlag, Berlin 1971.

D. Amir

[1] On isomorphisms of continuous function spaces, Israel J. Math. 3 (1965), pp. 205-210.

[2] Pojeations onto continuous function spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), pp. 396-402.

D. Amir and J. Lindenstrauss

[1] The structure of weakly compact sets in Banach spaces, Ann. of Math. 88 (1968), pp. 35-46.

R. D. Anderson

[1] Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), pp. 515-519.

[2] On topological infinite deficiency, Michigan Math. J. 14 (1967), pp. 365-383.

[3] Homeomorphism on infinite-dimensional manifolds, Proc. Inter. Math.Congress, Nice 1970, vol. 2, pp. 13-18.

[4] On sigma-compact subsets of infinite-dimensional manifolds, preprint.

T. Ando

[1] Banachverbände und positive Projektionen, Math. z. 109 (1969), pp. 121-130.

N. Aronszajn

[1] Caractérisation métrique de l'espace de Hilbert, des espaces vectoriels et de certains groups métriques, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 201 (1935), pp. 811-813 and pp. 873-875.

E. Asplund

[1] Fréchet differentiability of convex functions, Acta Math. 121 (1968), pp. 31-47.

[2] Averaged norms, Israel J. Math. 5 (1967), pp. 227-233.

H. Auerbach

[1] Sur les groups bornés de substitutions linéaires, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 195 (1932), pp. 1367-1369.

H. Auerbach, S. Mazur et S. Ulam

[1] Sur une propriété caractéristique de l' ellipsoide, Monatshefte für Mathematik und Physik 42 (1935), pp. 45-48.

W. G. Bade

[1] The Banach space C(S), Lecture Notes 26, Aarhus University 1971.

S. Banach and S. Mazur

[1] Zur Theorie der Linearen Dimension, Studia Math. 4 (1933), pp. 100-112.

R. G. Bartle and L. M. Graves

[1] Mappings between function spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), pp. 400-413.

Y. Benyamini and J. Lindenstrauss

[1] A predual of l_1 which is not isomorphic to a C(K) space, Israel J. Math. 13 (1972), pp. 246-254.

S. Bernau and H. E. Lacey

[1] Characterisations and classifications of some classical Banach spaces, Advances in Math. 12 (1974), pp. 367-401.

C. Bessaga

[1] On topological classification of complete linear metric spaces, Fund. Math. 55 (1965), pp. 251-288.

[2] Topological equivalence of non-separable Banach spaces, Symp. On Infinite-Dimensional Topology, Ann. of Math. Studies 69 (1972), pp. 3-14.

C. Bessaga and A. Pelczyński

[1] Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares I, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), pp. 77-80.

[2] Banach spaces of continuous functions IV, Studia Math. 19 (1960), pp. 53-62.

[3] On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, ibid. 17 (1958), pp. 151-164.

[4] Properties of bases in B_0 spaces, Prace Mat. 3 (1959), pp. 123-142 (Polish) •

[5] Some remarks on homeomorphisms of Banach spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), pp. 757-760.

[6] Some remarks on homeomorphisms of *F*-spaces, ibid. 10 (1962), pp. 265-270.

[7] A topological proof that every separable Banach space is homeomorphic to a countable produat of lines, ibid. 17 (1969), pp. 487-493.

[8] The estimated extension theorem, homogeneous collections and skeletons, and their applications to the topological classification of linear metric spaces and convex sets, Fund. Math. 69 (1970), pp. 153-190.

[9] On spaces of measurable functions, Studia Math. 44 (1972), pp. 597-615.

[10] Selected topics in infinite-dimensional topology, Monografie Matematyczne 58, PWN, Warszawa 1975.

C. Bessaga, A. Pelczyński and S. Rolewicz

[1] On diametral approximative dimension and linear homogeneity of *F*-spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. 9 (1961), pp. 677-683.

E. Bishop and R. R. Phelps

[1] A proof that every Banach space is subreflexive, Bull. Amer. Math. Soc.. 67 (1961), pp.

97-98.

[2] The support functionals of a convex set, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. VII, Convexity, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1963.

S. V. Bŏckariev

[1] Existence of bases in the space of analytic functions and some properties of the Franklin system, Math. Sbornik 95 (137) (1974), pp. 3-18 (Russian).

F. Bohnenblust

[1] A characterization of complex Hilbert spaces, Portugal. Math. 3 (1942), pp. 103-109.

[2] Subspaces of $l_{p,n}$ spaces, Amer. J. Math. 63 (1941), pp. 64-72.

E. D. Bolker

[1] A class of convex bodies, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), pp. 323-345.

R. Bonic and J. Frampton

[1] Smooth functions on Banach manifolds, J. Math. Mech. 15 (1966), pp. 877-898.

K. Borsuk

[1] Über Isomorphie der Funktionalräume, Bull. Int. Acad. Pol. Sci. (1933), pp. 1-10.

N. Bourbaki

[1] Eléments de mathématique, Livre V, Espaces vectoriels topologiques, Hermann, Paris 1953.

[2] Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, Paris 1960.

J. Bretagnolle et D. Dacunha-Castelle

[1] Application de l'étude de certaines formes linéaires aléatoires au plongement d'espaces de Banach dans des espaces L^p, Ann. Ecole Normale Supérieure 2 (1969), pp. 437-480.

J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle et J. L. Krivine

[1] Lois stables et espaces L^p, Ann. Inst. Henri Poincaré,Sér. B. 2 (1966), pp. 231-259.

A. Brunel and L. Sucheston

[1] On *B*-convex Banach spaces, Math. Systems Theory 7 (1973).

D. Burghelea and N. H. Kuiper

[1] Hilbert manifolds, Ann. of Math. 90 (1969), pp. 379-417.

D. L. Burkholder

[1] Distribution function inequalites for martingales, Annals of Probability 1 (1973), pp. 19-42.

M. Cambern

[1] A generalised Banach-Stone theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 396-400.

T. A. Chapman

[1] On some application of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape, Fund. Math. 76 (1972), pp. 181-193.

[2] On the structure of Hilbert cube manifolds, Compositio Math. 24 (1972), pp. 329-353.

[3] Contractible Hilbert cube manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), pp. 254-258.

[4] Compact Hilbert cube manifolds and the invariance of the Whitehead torsion, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), pp. 52-56.

[5] Classification of Hilbert cube manifolds and infinite simple homotopy types, Topology.

[6] Surgery and handle straightening in Hilbert cube manifolds, Pacific J. Math. 45 (1973), pp.

59-79.

Z. Ciesielski

[1] A construction of basis in $C^1(I^2)$, Studia Math, 33 (1969), pp. 243-247.

Z. Ciesielski and J. Domsta

[1] Construction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ 和 $W_p^m(I^d)$, Studia Math. 41 (1972), pp. 211-224.

J. A. Clarkson

[1] Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), pp. 396-414.

M. Cohen

[1] A course in simple homotopy theory, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1973.

D. F. Cudia

[1] The geometry of Banach spaces. Smoothness. Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964), pp. 284-314.

[2] Rotundity, Proc. Sympos. Pure Math. 7, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1963.

D. Dacunha-Castelle et J. L. Krivine

[1] Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et des algébres de Banach, Studia Math. 41 (1972), pp. 315-334.

I. K. Daugavet

[1] Some applications of the generalized Marcinkiewicz-Berman identity, Vestnik Leningrad. Univ. 23 (1968), pp. 59-64 (Russian).

A. M. Davie

[1] The approximation problem for Banach spaces, Bull. London Math. Soc. 5 (1973), pp. 261-266.

[2] Linear extension operators for spaces and algebras of functions, American J. Math. 94 (1972), pp. 156-172..

[3] The Banach approximation problem, J. Approx. Theory 13 (1975), pp. 392-394.

W. J. Davis, D. W. Dean and I. Singer

[1] Complemented subspaces and A-systems in Banach spaces, Israel J. Math. 6 (1968), pp. 303-309.

W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson and A. Pelczyński

[1] Factoring weakly compact operators, J. Functional Analysis 17 (1974), pp. 311-327.

W. J. Davis and W. B. Johnson

[1] A renorming of non reflexive Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1973), pp. 486-488.

[2] Basic sequences and norming subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces, Israel J. Math. 14 (1973), pp. 353-367.

[3] On the existence of fundamental and total bounded biorthogonal systems in Banach spaces, Studia Math. 45 (1973), pp. 173-179.

M. M. Day

[1] Normed linear spaces, Ergebnisse d. Math., Springer Verlag 1958.

[2] Strict convexity and smoothness of normed spaces, Trans. Amer. Math.Soc. 78 (1955), pp. 516-528.

[3] Uniform convexity in factor and conjugate spaces, Ann. of Math. 45 (1944), pp. 375-385.

[4] Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), pp. 313-317.

[5] On the basis problem in normed spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962),pp. 655-658.

M. M. Day, R. C. James and S. Swaminathan

[1] Normed linear spaces that are uniformly convex in every direction, Canad. J. Math. 23 (1971), pp. 1051-1059.

D. W. Dean

[1] The equation $L(E,X^{**}) = L(E,X)^{**}$ and the principle of local reflexivity, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973), pp. 146-149.

J. Dieudonné

[1] Complex structures on real Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), pp. 162-164.

[2] Recent developments in the theory of locally convex vector spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1953), pp. 495-512.

[3] On biorthogonal systems, Michigan J. Math. 2 (1954), pp. 7-20.

S. Ditor

[1] On a lemma of Milutin concerning averaging operators in continuous function spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 443-452.

J. Dixmier

[1] Sur un théorème de Banach, Duke Math. J. 15 (1948), pp. 1057-1071.

E. Dubinsky

[1] Every separable Fréchet space contains a non stable dense subspace, Studia Math. 40 (1971), pp. 77-79.

N. Dunford and J. T. Schwartz

[1] Linear operators, I. General theory; II. Spectral theory; III. Spectral operators, Interscience Publ., New York-London 1958; 1963; 1971.

A. Dvoretsky

[1] A theorem on convex bodies and applications to Banach spaces, Proc. Nat.
Acad. Sci. USA 45 (1959), pp. 223-226.

[2] Some results on convex bodies and Banach spaces, Proc. Symp. Linear Spaces, Jerusalem (1961), pp. 123-160.

A. Dvoretsky and C. A. Rogers

[1] Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950), pp. 192-197.

W. F. Eberlein

[1] Weak compactness in Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 33 (1947), pp. 51-53.

D. A. Edwards

[1] Compact convex sets, Proc. Int. Math. Congress Nice D, pp. 359-362.

J. Eells and K. D. Elworthy

[1] Open embeddings of certain Banach manifolds, Ann. of Math. 91 (1970), pp. 465-485.

E. G. Effros

[1] On a class of real Banach spaces, Israel J. Math. 9 (1971), pp. 430-458.

[2] Structure in simplex spaces, Acta Math. 117 (1967), pp. 103-121.

[3] Structure in simplexes II, J. Functional Analysis 1 (1967), pp. 379-391.

S. Eilenberg

[1] Banach space methods in topology, Ann. of Math. 43 (1942), pp. 568-579.

K. D. Elworthy

[1] Embeddings isotopy and stability of Banach manifolds, Compositio Math. 24 (1972), pp. 175-226.

P. Enflo

[1] Uniform structures and square roots in topological groups I, II, Israel J. Math. 8 (1970), pp. 230-252: pp. 253-272.

[2] Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm, ibid. 13 (1973), pp. 281-288.

[3] A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math. 130 (1973), pp. 309-317.

[4] A Banach space with basis constant > 1, Ark. Mat. 11 (1973), pp. 103-107.

[5] On the non-existence of uniform homeomorphisms between L_p-spaces, ibid. 8 (1971), pp. 103-105.

[6] On a problem of Smirnov, ibid. 8 (1971), pp. 107-109.

A. S. Esenin-Volpin

[1] On the existence of the universal compactum of arbitrary weight, Dokl. Akad. Nauk SSSR 68 (1949), pp. 649-653 (Russian).

T. Figiel

[1] An example of infinite dimensional reflexive Banach space non-isomorphic to its Cartesian square, Studia Math. 42 (1972), pp. 295-306.

[2] Some remarks on Dvoretsky's theorem on almost spherical sections of convex bodies, Colloq. Math. 24 (1972), pp. 241-252.

[3] Factorization of compact operators and applications to the approximation problem, Studia Math. 45 (1973), pp. 191-210.

[4] Further counterexamples to the approximation problem, preprint the Ohio State University (1973).

[5] A short proof of Dvoretsky's theorem, Compositio Math. 33 (1976), pp.297-301.

T. Figiel and W. B. Johnson

[1] The approximation property does not imply the bounded approximation property, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), pp. 197-200.

[2] A uniformly convex space which contains no l_p, Compositio Math. 29 (1974), pp. 179-190.

T. Figiel and A. Pelczyński

[1] On Enflo's method of construction of Banach spaces without the approximation property, Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), pp. 95-108 (Russian).

T. Figiel and G. Pisier

[1] Series aléatoires dans les espaces uniformément convexes ou uniformément lisses, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 279 (1974), pp. 611-614.

C. Foiaş

[1] Sur certains théorèmes de J. von Neumann concernant les ensembles spectraux, Acta Sci. Math. (Szeged) 18 (1957), pp. 15-20.

M. Fréchet

[1] Sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espaces de Hilbert, Ann. of Math. 36 (1935), pp. 705-718.

V. F. Gaposhkin

[1] On the existenae of unconditional bases in Orlicz spaces, Functional Anal. i Priložen. 1 (1967), pp. 26-32 (Russian).

D. J. H. Garling and Y. Gordon

[1] Relations between some constants associated with finite dimensional Banach spaces, Israel J. Math. 9 (1971), pp. 346-361.

B. R. Gelbaum

[1] Banach spaces and bases, An. Acad. Brasil. Ci. 30 (1958), pp. 29-36.

I. M. Gelfand

[1] Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, Mat. Sb. 4 (1938), pp. 235-286.

R. Geoghegan and R. R. Summerhill

[1] Pseudo-boundaries and pseudo-interiors in euclidean space, Trans. Amer. Math. Soc. 194 (1974), pp. 141-165.

D. P. Giesy

[1] A convexity condition in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc.125 (1966), pp. 114-146.

Y. Gordon

[1] On the distance coefficient between isomorphic function spaces, Israel J. Math. 8 (1970), pp. 391-397.

[2] Asymmetry and projection constants of Banach spaces, ibid. 14 (1973), pp. 50-62.

[3] On the projection and Macphail constants of l_n^p spaces, ibid. 6 (1968), pp. 295-302.

[4] On p-absolutely summing constants of Banach spaces, ibid. 7 (1969), pp. 151-163.

Y. Gordon and D. R. Lewis

[1] Absolutely summing operators and local unconditional structures, Acta Math. 133 (1974), pp. 27-48.

Y. Gordon, D. R. Lewis and J. R. Retherford

[1] Banach ideals of operators with applications to the finite dimensional structure of Banach spaces, Israel J. Math. 13 (1972), pp. 348-360.

[2] Banach ideals of operators with applications, J. Functional Analysis 14 (1973), pp. 85-129.

M. L. Gromov

[1] On a geometric conjecture of Banach, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 31 (1967), pp. 1105-1114 (Russian).

A. Grothendieck

[1] Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux, Amer. J. Math. 74 (1952), pp. 168-186.

[2] Une caractérisation vectorielle métrique des espaces L_1, Canad. J. Math. 7 (1955), pp. 552-561.

[3] Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$, ibid. 5 (1953), pp. 129-173.

[4] Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[5] Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1956), pp. 1-79.

[6] Sur certaines classes des suites dans les espaces de Banach et le théoréme de Dvoretsky-Rogers, ibid. 8 (1956), pp. 80-110.

B. Grünbaum

[1] Projection constants, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), pp. 451-465.

V. I. Gurariĭ

[1] Space of universal disposition, isotopic spaces and the Mazur problem on rotations of Banach spaces, Sibirsk. Mat. Ž. 7 (1966), pp. 1002-1013 (Russian).

[2] On moduli of convexity and smoothness of Banach spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 161 (1965), pp. 1105-1114 (Russian).

[3] On dependence of certain geometric properties of Banach spaces on modulus of convexity, Teor. Funkciĭ Funktional. Anal. i Priložen. 2 (1966), pp. 98-107 (Russian).

[4] On differential properties moduli of convexity of Banach spaces, Mat. Issled. 2.1 (1967), pp. 141-148 (Russian).

V. I. Gurariĭ and N. I. Gourariĭ

[1] On bases in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 35 (1971), pp. 210-215.

V. I. Gurariĭ M. I. Kadec and V. I. Macaev

[1] On Banach-Mazur distance between certain Minkowski spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), pp. 719-722.

[2] Distances between finite dimensional analogs of the L_p-spaces, Mat. Sb.70 (112) (1966), pp. 24-29 (Russian).

[3] Dependence of certain properties of Minkowski spaces on asymmetry, ibid. 71 (113) (1966), pp. 24-29 (Russian).

O. Hanner

[1] On the uniform convexity of L^p and l^p, Ark. Mat. 3 (1956), pp. 239-244.

D. W. Henderson

[1] Stable classification of infinite-dimensional manifolds by homotopy type, Invent. Math. 12

(1971), pp. 45-56.

[2] Corrections and extensions of two papers about infinite-dimensional manifolds, General Topol. and Appl. 1 (1971), pp. 321-327.

D. W. Henderson and R. M. Schori

[1] Topological classification of infinite-dimensional manifolds by homotopy type, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), pp. 121-124; cf. Henderson [2].

G. M. Henkin

[1] On stability of unconditional bases in a uniformly convex space, Uspehi Mat. Nauk 18 (1963), pp. 219-224 (Russian).

J. R. Isbell and Z. Semadeni

[1] Projection constants and spaces of continuous functions, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963), pp. 38-48.

R. C. James

[1] Bases and reflexivity of Banach spaces, Ann. Of Math. 52 (1950), pp.518-527.

[2] A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37 (1957), pp. 174-177.

[3] Characterisations of reflexivity, Studia Math. 23 (1964), pp. 205-216.

[4] Weakly compact.sets, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1964), pp. 129-140.

[5] Weak compactness and reflexivity, Israel J. Math. 2 (1964), pp. 101-119.

[6] Reflexivity and the sup of linear functionals, ibid. 13 (1972), pp. 289-300.

[7] Separable conjugate spaces, Pacific Math. J. 10 (1960), pp. 563-571.

[8] A separable somewhat reflexive Banach space with nonseparable dual,Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), pp. 738-743.

[9] Uniformly non square Banach spaces, Ann. of Math. 80 (1964), pp. 542-550.

[10] Super-reflexive Banach spaces, Canad. J. Math. 24 (1972), pp. 896-904.

[11] Some self dual propepties of normed linear spaces, Ann. Math. Studies 69, Princeton Univ. Press (1972), pp. 159-175.

[12] Super-reflexive spaces with bases, Pacific J. Math. 41 (1972), pp. 409-419.

[13] The nonreflexive Banach space that is uniformly nonoctahedral, Israel J. Math. 18 (1974), pp. 145-155.

R. C. James and J. J. Schaffer

[1] Super-reflexivity and the girth of spheres, Israel J. Math. 11 (1972), pp. 398-404.

F. John

[1] Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, R. Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), pp. 187-204.

W. B. Johnson

[1] A complementably universal conjugate Banach space and its relation to the approximation problem, Israel J. Math. 13 (1972), pp. 301-310.

[2] Factoring compact operators, ibid. 9 (1971), pp. 337-345.

W. B. Johnson and J. Lindenstrauss

[1] Some remarks on weakly compactly generated Banach spaces, Israel J. Math. 17 (1974), pp. 219-230.

W. B. Johnson and E. Odell

[1] Subspaces of L_p which embed into l_p, Compositio Math. 28 (1974), pp. 37-51.

W. B. Johnson and H. P. Rosenthal

[1] On w*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces, Studia Math. 43 (1972), pp. 77-92.

W. B. Johnson, H. P . Rosenthal and M. Zippin

[1] On bases finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces, Israel J. Math. 9 (1971), pp. 488-506.

W. B. Johnson and M. Zippin

[1] On subspaces and quotient of $(\Sigma G_n)l_p$ and $(\Sigma G_n)_{c_0}$, Israel J. Math. 13 (1972), pp. 311-316.

J. T. Joichi

[1] Normed linear spaces equivalent to inner product spaces, Proc. Amer. Soc. 17 (1966), pp. 423-426.

P. Jordan and J. von Neumann

[1] On inner products in linear metric spaces, Ann. of Math. 36 (1935), pp. 719-723.

M. I. Kadec

[1] Spaces isomorphic to a locally uniformly convex space, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika 6 (13) (1959), pp. 51-57 (Russian).

[2] Letter to the editor, ibid. 6 (25) (1961), pp. 186-187 (Russian).

[3] Conditions for differentiability of norm in Banach space, Uspehi Mat. Nauk 20.3 (1965), pp. 183-188.

[4] On linear dimension of the spaces L_p, ibid. 13 (1958), pp. 95-98 (Russian) .

[5] Unconditional convergence of series in uniformly convex spaces, ibid. 11 (1956), pp. 185-190 (Russian).

[6] On homeomorphism of certain Banach spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 92 (1953), pp. 465-468 (Russian).

[7] On the topological equivalence of uniformly convex spaces, Uspehi Mat. Nauk 10 (1955), pp. 137-141 (Russian).

[8] On strong and weak convergence, Dokl. Akad. Nauk SSSR 122 (1958), pp. 13-16 (Russian).

[9] On connection between weak and strong convergence, Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR 9 (1959), pp. 465-468 (Ukranian).

[10] On the topological equivalence of cones in Banach spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 162 (1965), pp. 1241-1244 (Russian).

[11] On the topological equivalence of separable Banach spaces, ibid. 167 (1966), pp. 23-25; English translation: Soviet Math. Dokl. 7 (1966), pp. 319-322.

[12] A proof of the topological equivalence of all separable infinitedimensional Banach spaces, Funkcional. Anal. i Priložen. 1 (1967), pp. 53-62 (Russian).

M. I. Kadec and Ya. Levin

[1] On a solution of Banach's problem concerning the topological equivalence of spaces of continuous functions, Trudy Sem. Funkcional. Anal. Voronesh (1960) (Russian).

M. I. Kadec and B. S. Mityagin

[1] Complemented subspaces in Banach spaces, Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), pp. 77-94.

M. I. Kadec and A. Pelczyński

[1] Bases lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p, Studia Math. 21 (1962), pp. 161-176.

[2] Basic sequences, biorthogonal systems and norming sets in Banach and Fréchet spaces, ibid. 25 (1965), pp. 297-323 (Russian).

M. I. Kadec and M. G. Snobar

[1] On some functionals on Minkowski compactum, Mat. Zametki 10 (1971), pp. 453-458 (Russian).

S. Kakutani

[1] Some characterizations of Euclidean spaces, Japan. J. Math. 16 (1939), pp. 93-97.

O. H. Keller

[1] Die Homöomorphie der kompakten konvexen Mengen im Hilbertschen Raum, Math. Ann. 105 (1931), pp. 748-758.

V. L. Klee

[1] Mappings into normed linear spaces, Fund. Math. 49 (1960), pp. 25-34.

[2] Polyhedral sections of convex bodies, Acta Math. 103 (1960), pp. 243-267.

[3] Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), pp. 10-40.

[4] Some topological properties of convex sets, ibid. 78 (1955), pp. 30-45.

[5] On the Borelian and projective types of linear subspaces, Math. Scand. 6 (1958), pp. 189-199.

[6] Topological equivalence of a Banach space with its unit cell, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), pp. 286-290.

G. Köthe

[1] Topological vector spaces, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1969.

[2] Hebbare Lokalkonvexe Röume, Math. Ann. 165 (1966), pp. 181-195.

J. L Krivine

[1] Sous-espaces et cones convexes dans les espaces L^p, Thèse, Paris 1967.

S. Kwapień

[1] Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients, Studia Math. 44 (1972), pp. 583-595.

[2] On Banach spaces containing co. A supplement to the paper by J. Hoffman-Jorgensen "Sums of independent Banach space valued random variables", ibid. 52 (1974), pp. 187-188.

[3] On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators, ibid. 38 (1970), pp. 193-201.

[4] On Enflo's example of a Banach space without the approximation property, Seminaire

Goulaonic-Schwartz 1972-1973, Ecole Polytechnique, Paris.

H. E. Lacey

[1] The isometric theory of classical Banach spaces, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1974.

A. Lazar

[1] Spaces of affine continuous functions on simplexes, Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968), pp. 503-525.

[2] The unit ball in conjugate L_1 -space, Duke Math. J. 36 (1972), pp. 1-8.

[3] Polyhedral Banach spaces and extensions of compact operators, Israel J. Math. 7 (1969), pp. 357-364.

A. Lazar and J. Lindenstrauss

[1] Banach spaces whose duals are L1-spaces and their representing matrices, Acta Math. 126 (1971), pp. 165-195.

P. Levy

[1] Théorie de l'addition de variables aléatoires, Paris 1937.

D. R. Lewis and C. Stegall

[1] Banach spaces whose duals are isomorphic to $l_1(\Gamma)$, J. Functional Analysis 12 (1973), pp. 177-187.

J. Lindenstrauss

[1] Extension of compact operators, Mem. Amer. Math. Soc. 48 (1964), pp. 1-112.

[2] The geometric theory of classical Banach spaces, Proc. Int. Math. Congress Nice, pp. 365-373.

[3] On complemented subspaces of m, Israel J. Math. 5 (1967), pp. 153-156.

[4] Some aspects of the theory of Banach spaces, Advances in Math. 5 (1970), pp. 159-180.

[5] On James's paper "Separable conjugate spaces", Israel J. Math. 9 (1971), pp. 279-284.

[6] Weakly compact sets - their topological properties and the Banach spaces they generate, Ann. Math. Studies 69, Princeton Univ. Press (1972), pp. 235-273.

[7] A remark on L_1 -spaces, Israel J. Math. 8 (1970), pp. 80-82.

[8] On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces, Michigan Math. J. 10 (1963), pp. 241-252.

[9] A remark on symmetric bases, Israel J. Math. 13 (1972), pp. 317-320.

[10] On non-linear projections in Banach spaces, Michigan Math. J. 11 (1964), pp. 263-287.

J. Lindenstrauss and A. Pelczyński

[1] Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968), pp. 275-326.

[2] Contributions to the theory of the classical Banach spaces, J. Functional Analysis 8 (1971), pp. 225-249.

J. Lindenstrauss and H. P. Rosenthal

[1] The L_p spaces, Israel J. Math. 7 (1969), pp. 325-349.

J. Lindenstrauss and C. Stegall

[1] Examples of separable spaces which do not contain l_1 and whose duals are non-separable, Studia Math. 54 (1975), pp. 81-103.

J. Lindenstrauss and L. Tzafriri

[1] Classical Banach spaces: I. Sequence spaces; II. Function spaces, Springer Verlag, Ergebnisse, Berlin-Heidelberg-New York 1977; 1979.

[2] Classical Banach spaces, Lecture Notes in Math. 333, Springer Verlag, Berlin 1973.

[3] On complemented subspaces problem, Israel J. Math. 9 (1971), pp. 263-269.

J. Lindenstrauss and D. E. Wulbert

[1] On the classification of the Banach spaces whose duals are l_1-spaces, J. Functional Analysis 4 (1969), pp. 332-349.

J. Lindenstrauss and M. Zippin

[1] Banach spaces with sufficiently many Boolean algebras of projections, J. Math. Anal. Appl. 25 (1969), pp. 309-320.

A. Lovaglia

[1] Locally uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), pp. 225-238.

D. Maharam

[1] On homogeneous measure algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 28 (1942), pp. 108-111.

P. Mankiewicz

[1] On the differentiability of Lipschitz mappings in Fréchet spaces, Studia Math. 45 (1973), pp. 13-29.

[2] On Fréchet spaces uniformly homeomorphic to the spaces $H \times s$, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), pp. 529-531.

J. Marcinkiewicz

[1] Quelques théorèmes sur les séries orthogonales, Ann. Soc. Polon. Math.16 (1937), pp. 84-96.

B. Maurey

[1] Théorèmes de factorisation pour les opérateurs lineaires à valeurs dans les espaaes L^p, Astérisque 11 (1974), pp. 1-163.

B. Maurey et G. Pisier

[1] Un théorème d'extrapolation et ses conséquences, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 277 (1973), pp. 39-42.

[2] Caractérisation d'une classe d'espaces de Banach par des propriétés de séries aléatoires veatorielles, ibid. 277 (1973), pp. 687-690.

S. Mazur

[1] Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels, Studia Math. 1 (1929), pp. 83-85.

S. Mazur and L. Sternbach

[1] Über die Borelschen Typen von linearen Mengen, Studia Math. 4 (1933), pp. 48-54.

C. W. McArthur

[1] Development in Schauder basis theory, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), pp. 877-908.

E. Michael

[1] Selected selection theorems, Amer. Math. Monthly 58 (1956), pp. 233-238.

[2] Continuous selections I, Ann. of Math. 63 (1956), pp. 361-382.

[3] Convex structures and continuous selections, Canad. J. Math. 11 (1959), pp. 556-575.

E. Michael and A. Pelczyński

[1] A linear extension theorem, Illinois J. Math. 11 (1967), pp. 563-579.

H. Milne

[1] Banach space properties of uniform algebras, Bull. London Math. Soc. 4 (1972), pp. 323-327.

H. W. Milnes

[1] Convexity of Orlicz spaces, Pacific J. Math. 7 (1957), pp. 1451-1483.

V. D. Milman

[1] Geometric theory of Banach spaces, I: Uspehi Mat. Nauk 25.3 (1970), pp. 113-173; II: Uspehi Mat. Nauk 26.6 (1971), pp. 73-149 (Russian).

[2] New proof of the theorem of A. Dvoretzky on intersections of convex bodies, Funkcional. Anal. i Priložen. 5 (1971), pp. 28-37 (Russian).

A. A. Milutin

[1] Isomorphisms of spaces of continuous functions on compacta of power continuum, Teor. Funkciĭ, Funkcional. Anal. i Priložen. 2 (1966), pp. 150-156 (Russian) .

B. S. Mityagin

[1] Approximative dimension and bases in nuclear spaces, Uspehi Mat. Nauk 14 (100) (1961), pp. 63-132 (Russian).

[2] Fréchet spaces with the unique unconditional basis, Studia Math. 38 (1970), pp. 23-34.

[3] The homotopy structure of the linear group of a Banach space, Uspehi Mat. Nauk 25 (1970), pp. 63-106 (Russian).

N. Moulis

[1] Structures de Fredholm sur les variétés Hilbertiennes, Lecture Notes in Mathematics 259, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

F. J. Murray

[1] On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p, Trans. Amer. Math., Soc. 41 (1937), pp. 138-152.

L. Nachbin

[1] A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), pp. 28-46.

J. von Neumann

[1] Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitiiren Raumes, Math. Nachr. 4 (1951), pp. 258-281.

G. Nordlander

[1] The modulus of convexity in normed linear spaces, Ark. Mat. 4 (1960), pp. 15-17.

[2] On sign-independent and almost sign-independent convergence in normed linear spaces, ibid. 4 (1960), pp. 287-296.

A. M. Olevskiĭ

[1] Fourier series and Lebesgue functions, Summary of a lecture to the Moscow Math. Soc. Uspehi Mat. Nauk 22 (1967), pp. 236-239 (Russian).

W. Orlicz

[1] Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen I, Studia Math. 4 (1933), pp. 33-37.

[2] Uber unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen II, ibid. 4 (1933), pp. 41-47.

[3] Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwiaklungen II, ibid. 1 (1929), pp. 243-255.

R. E. A. C. Paley

[1] Some theorems on abstract spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), pp. 235-240.

[2] A remarkable series of orthogonal functions I, Proc. London Math. Soc. 34 (1932), pp. 247-268.

A. Pelczyński

[1] A proof of Eberlein-Šmulian theorem by an application of basic sequences, Bull. Acad. Polan. Sci. 12" (1964), pp. 543-548.

[2] On Banach spaces containing $L_1(\mu)$, Studia Math. 30 (1968), pp. 231-246.

[3] Projections in certain Banach spaces, ibid. 19 (1960), pp. 209-228.

[4] Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions, Dissertationes Math. 58 (1968).

[5] On the isomorphism of the spaces m and M, Bull. Acad. Polan. Sci. 6 (1958), pp. 695-696.

[6] Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis, Studia Math. 40 (1971), pp. 239-242.

[7] A note to the paper of I. Singer "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces", ibid. 21 (1962), pp. 371-374.

[8] Universal bases, ibid. 32 (1969), pp. 247-268.

A. Pelczyński and H. P Rosenthal

[1] Localization techniques in L^p spaces, Studia Math. 52 (1975), pp. 263289.

A. Pelczyński and P. Wojtaszczyk

[1] Banach spaces with finite dimensional expansions of identity and universal bases of finite dimensional subspaces, Studia Math. 40 (1971), pp. 91-108.

A. Persson and A. Pietsch

[1] p-nukleare and p-integrale Abbildungen in Banachräumen, Studia Math. 33 (1969), pp. 19-62.

R. S. Phillips

[1] A characterization of Euclidean spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), pp. 930-933.

A. Pietsch

[1] Operator Ideals, Akademie-Verlag, Berlin 1978.

[2] Nukleare lokal konvexe Räume, Akademie Verlag, Berlin 1965.

[3] Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Math. 28 (1967), pp. 333-353.

G. Pisier

[1] Sur les espaces de Banach qui ne contiennent pas uniformétment de l_n^1, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 277 (1973), pp. 991-994.

V. Ptak

[1] On a theorem of W. F. Eberlein, Studia Math. 14 (1954), pp. 276-284.

F. D. Ramsey

[1] On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. 30 (1929), pp. 338-384.

G. Restrepo

[1] Differentiable norms in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), pp. 413-414.

J. R. Retherford

[1] Operator characterisations of L_p spaces, Israel J. Math. 13 (1972), pp. 337-347.

J. R. Retherford and C. Stegall

[1] Fully nuclear and completely nuclear operators with applications to L_1 and L_∞ spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 163 (1972), pp. 457-492.

F. Riesz

[1] Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69 (1910), pp. 449-497.

S. Rolewicz

[1] An example of a normed space non-isomorphic to its product by the real line, Studia Math. 40 (1971), pp. 71-75.

[2] Metric linear spaces, Monografie Matematyczne 56, PWN, Warszawa 1972.

H. P. Rosenthal

[1] The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces, Compositio Math. 28 (1974), pp. 83-111.

[2] On relatively disjoint families of measures with some applications to Banach space theory, Studia Math. 37 (1970), pp. 13-36.

[3] On the subspaces of $L_p(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables, Israel J. Math. 8 (1970), pp. 273-303.

[4] On the span in L_p of sequence of independent random variables II, Proc.6th Berkeley Symp. on Prob. and Statis. vol. II. Probability theory (1972), pp.149-167.

[5] On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ, Acta Math. 124 (1970), pp. 205-248.

[6] On factors of $C[0,1]$ with non-separable dual, Israel J. Math. 13 (1972), pp. 361-378.

[7] On subspaces of L_p, Ann. of Math. 97 (1973), pp. 344-373.

[8] Projections onto translation invariant subspaces of $L_p(G)$, Memoirs of Amer. Math. Soc. 63 (1966).

D. Rutovitz

[1] Some parameters associated with finite-dimensional Banach spaces, J. London Math. Soc. 40 (1965), pp. 241-255.

H. H. Schaeffer

[1] Topological vector spaces, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1971.

I. J. Schoenberg

[1] Metric spaces and positive definite functions, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), p. 522-536.

[2] Metric spaces and completely continuous functions, Ann. of Math. 39 (1938), pp. 809-841.

S. Schonefeld

[1] Schauder bases in spaces of differentiable functions, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), pp. 586-590.

[2] Sahauder bases in the Banach space $C^k(T^q)$, Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), pp. 309-318.

L. Schwartz

[1] Applications p-radonifiantes et théorème de dualité, Studia Math. 38 (1970), pp. 203-213.

[2] Applications radonifiantes, Séminaire L. Schwartz, Ecole Polytechnique, Paris 1969-1970.

Z. Semadeni

[1] Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares II, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), pp. 81-84.

[2] Banach spaces of continuous functions, Vol. I, Monografie Matematyczne 55, PWN, Warszawa 1971.

E. M. Semenov

[1] The new interpolation theorem, Funkcional. Anal. i Priložen. 2 (1968), pp. 68-80.

W. Sierpiński

[1] Cardinal and ordinal numbers, Monografie Matematyczne 94, PWN, Warszawa 1958.

I. Singer

[1] Bases in Banach spaces I, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

V. L. Šmulian

[1] Über Lineare topologische Räume, Mat. Sbornik 7 (1940), pp. 425-448.

M. G. Snobar

[1] On p-absolutely summing constants, Teor. Funkciĭ, Funkcional. Anal. I Priložen. 16 (1972), pp. 38-41.

A. Sobczyk

[1] Projection of the space m on its subspace c_0, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), pp. 938-947.

[2] Projections in Minkowski and Banach spaces, Duke Math. J. 8 (1941), pp. 78-106.

M. H. Stone

[1] Application of the theory of boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), pp. 375-481.

K. Sundaresan

[1] Smooth Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), pp. 520-521.

A. Szankowski

[1] On Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies, Israel J. Math. 17 (1974), pp. 325-338.

W. E. Terry

[1] Any infinite-dimensional Fréchet space homeomorphic with its countable product is topologically a Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc. 196 (1974), pp. 93-104.

H. Toruńczyk

[1] Skeletonized sets in complete metric spaces and homeomorphisms of the Hilbert cube, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970), pp. 119-126.

[2] Skeletons and absorbing sets in complete metric spaces, preprint.

[3] Compact absolute retracts as factors of the Hilbert spaces, Fund. Math. 83 (1973) pp. 75-84.

[4] Absolute retracts as factors of normed linear spaces, ibid. 86 (1974), pp. 53-67.

[5] On Cartesian factors and topological classification of linear metric spaces, ibid. 88 (1975), pp. 71-86.

S. L. Troyanski

[1] On locally convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces, Studia Math. 37 (1971), pp. 173-180.

[2] On the topological equivalence of the spaces $c_0(\aleph)$ and $l(\aleph)$, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 15 (1967), pp. 389-396.

L. Tzafriri

[1] On Banach spaces with unconditional bases, Israel J. Math. 17 (1974), pp. 84-93.

B. S. Tzirelson

[1] Not every Banach space contains l_p or c_0, Funkcional. Anal. i Priložen. 8 (1974), pp. 57-60 (Russian).

J. H. M. Whitfield

[1] Differentiable functions with bounded non empty support on Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), pp. 145-146.

R. J. Whitley

[1] An elementary proof of the Eberlein-Šmulian theorem, Math. Ann. 172 (1967), pp. 116-118.

P. Wojtaszczyk

[1] Some remarks on the Gurariĭ space, Studia Math. 41 (1972), pp. 207-210.

M. Zippin

[1] On some subspaces of Banach spaces whose duals are L_1 spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), pp. 378-385.

[2] A remark on Pelazyński's paper "Universal bases", ibid. 26 (1970), pp. 294-300.

V. Zizler

[1] On some rotundity and smoothness properties of Banach spaces, Dissertationes Math. 87 (1971).

附 加 文 献

1. Aharoni

[1] Every separable metric space is Lipschitz equivalent to a subset of c_0, Israel J. Math. 19 (1974), pp. 284-291.

[2] Uniform embeddings of Banach spaces, ibid. 27 (1977), pp. 174-179.

I. Aharoni and J. Lindenstrauss

[1] Uniform equivalence between Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), pp. 281-283.

D. Alspach

[1] Quotients of $C[0,1]$ with separable dual, Israel J. Math. 29 (1978), pp. 361-384.

D. Alspach and Y. Benyamini

[1] Primariness of spaces of continuous functions on ordinals, Israel J. Math. 27 (1977), pp. 64-92.

D. Alspach, P. Enflo and E. Odell

[1] On the structure of separable L_p spaces ($1 < p < \infty$), Studia Math. 60 (1977), pp. 79-90.

S. Argyros and S. Negropontis

[1] Universal embeddings of l_α^1 into $C(X)$ and $L(\mu)$, to appear.

G. Bennett, L. E. Dor, V. Goodman, W. B. Johnson and C. M. Newman

[1] On uncomplemented subspaces of $L^p, 1 < p < 2$, Israel J. Math. 26 (1977), pp. 178-187.

Y. Benyamini

[1] An extension theorem for separable Banach spaces, Israel J. Math. 29 (1978), pp. 24-30.

[2] An M-space which is not isomorphic to a $C(K)$ space, ibid. 28 (1977), pp. 98-102.

P. Billard

[1] Sur la primarité des espaces $C(\alpha)$, Studia Math. 62 (1978), pp. 143-162.

J. Bourgain

[1] Un espace L^∞ jouissant de la propriété de Sahur et de la propriété de Radon-Nikodym, Seminaire d'Analyse Fonctionnelle 1978-1979, Ecole Polytechnique, Paris, Expose IV.

J. Bourgain, D. H. Fremlin and M. Talagrand

[1] Pointwise compact sets of Baire measurable functions, American J. of Math. 100 (1978), pp. 845-886.

T. A. Chapman

[1] Lectures on Hilbert cube manifolds, Conference board of the mathematical sciences, Regional conference series in mathematics, Volume 28, American Math. Soc., Providence, R. I., 1977.

H. B. Cohen

[1] A bounded to isomorphism between $C(X)$ Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 50 (1975), pp. 215-217.

F. K. Dashiell

[1] Isomorphism problems for the Baire Classes, Pacific J. Math. 52 (1974), pp. 29-43.

F. K. Dashiell and J. Lindenstrauss

[1] Some examples concerning strictly convex norms on C(K) spaces, Israel J. Math. 16 (1973), pp. 329-342.

J. Diestel

[1] Geometry of Banach spaces-selected topics, Lecture Notes in Math., vol. 485, Springer Verlag, Berlin-New York 1975.

J. Diestel and J. J. Uhl, Jr.

[1] Vector measures, Math. Surveys, Vol. 15, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977.

S. Ditor and R. Haydon

[1] On absolute retracts, *P(S)*, and complemented subspaces of $C(D^{\omega_1})$, Studia Math. 56 (1976), pp. 243-251.

L. Dor

[1] On sequence spanning a complex l_1 space, Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975), pp. 515-516.

P. Enflo, J. Lindenstrauss and G. Pisier

[1] On the three space problem, Math. Scand. 36 (1975), pp. 199-210.

P. Enflo and H. P. Rosenthal

[1] Some results concerning $L^p(\mu)$ -spaces, J. Functional Analysis 14 (1973), pp. 325-348.

P. Enflo and T. W. Starbird

[1] Subspaces of L^1 containing L^1 , Studia Math. 65, to appear.

A. Etcheberry

[1] Isomorphism of spaces of bounded continuous functions, Studia Math. 53 (1975), pp. 103-127.

T. Figiel

[6] On the moduZi of convexity and smoothness, Studia Math. 56 (1976), pp. 121-155.

[7] Uniformly convex norms on Banach lattices, ibid. 68, to appear.

[8] Lattice norms and the geometry of Banach spaces, Proceedings of the Leipzig Conference on operator ideals (Leipzig 1977).

T. Figiel, S. Kwapień and A. Pelczyński

[1] Sharp estimates for the constants of local unconditional structure of Minkowski spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. math., astr. et phys. 25 (1977), pp. 1221-1226.

T. Figiel, J. Lindenstrauss and V. Milman

[1] The dimension of almost spherical sections of convex bodies, Acta Math. 139 (1977), pp. 53-94.

J. L. B. Gamlen and R. J. Gaudet

[1] On subsequences of the Haar system in $L_p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$. Israel J. Math. 15 (1973), pp. 404-413.

S. P. Gulko and A. V. Oskin

[1] Isomorphic classification of spaces of continuous functions on totally ordered compact sets, Funktional. Analiz i Priloz. 9 (1975), pp. 56-57 (Russian).

I. Hagler

[1] On the structure of S and $C(S)$ for S dyadic, Trans. Amer. Math. Soc. 214 (1975), pp. 415-428.

[2] Some more Banach spaces which contain l^1, Studia Math. 46 (1973), pp. 35-42.

R. Haydon

[1] On dual l^1-spaces and injective bidual Banach spaces, to appear.

[2] On Banach spaces which contain $l^1(\tau)$ and types of measures on compact spaces, Israel J. Math. 28 (1977), pp. 313-324.

[3] On a problem of Pelczyński: Milutin spaces, Dugundji spaces and AE(O-dim} , Studia Math. 52 (1974), pp. 23-31.

[4] Embedding D^τ in Dugundji spaces, with an application to linear topological classification of spaces of continuous functions, ibid. 56 (1976), pp. 229242.

R. C. James

[14] Nonreflexive spaces of type 2, to appear.

W. B. Johnson

[3] unpublished.

W. B. Johnson, H. König, B. Maurey and J. R. Retherford

[1] EigenvaLues of p-summing and l_p-type operators in Banach spaces, J. Functional Analysis, to appear.

W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman and L. Tzafriri

[1] Symmetric structures in Banach spaces, Mem. Amer. Math. Soc., to appear.

W. B. Johnson and A. Szankowski

[1] Complementably universal Banach spaces, Studia Math. 58 (1976), pp. 91-97.

N. Kalton and N. T. Peck

[1] Twisted sums of sequence spaces and the three space problem, to appear.

S. V. Kislyakov

[1] Classification of spaces of continuous functions of ordinals, Siberian Math. J. 16 (1975), pp. 226-231 (Russian).

J. L Krivine

[2] Sous-espaces de dimension fini des espaces de Banach reticulés, Ann. of Math. 104 (1976), pp. 1-29.

W. Lusky

[1] The Gurariĭ spaces are unique, Arch. Math. 27 (1976), pp. 627-635.

B. Maurey et G. Pisier

[3] Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, Studia Math. 58 (1976), pp. 45-90.

B. Maurey and H. P. Rosenthal

[1] Normalized weakly null sequences with no unconditional subsequences, Studia Math. 61 (1977), pp. 77-98.

B. Maurey et L. Schwartz

[1] Seminaire Maurey-Schwartz 1972-1973; 1973-1974; 1974-1975; 1975-1976, École Polytechnique, Paris.

V. Z. Meshkov

[1] Smoothness properties in Banach spaces, Studia Math. 63 (1978), pp. 111-123.

V. Milman and H. Wolfson

[1] Minkowski spaces with extremal distance from the Euclidean space, Israel J. Math. 29 (1978), pp. 113-131.

T. Odell and H. P. Rosenthal

[1] A double dual characterization of separable Banach spaces containing l^1, Israel J. Math. 20 (1975), pp. 375-384.

R. I. Ovsepian and A. Pelczyński

[1] The existence in every separable Banach space of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in L^2, Studia Math. 54 (1975), pp. 149-159.

A. Pelczyński

[9] All separable Banach spaces admit for every $\varepsilon > 0$ fundamental total biorthogonal system bounded by $1+\varepsilon$, Studia Math. 55 (1976), pp. 295-304.

G. Pisier

[2] Martingales with values in uniformly convex spaces, Israel J. Math. 20 (1975), pp. 326-350.

M. Ribe

[1] On uniformly homeomorphic normed spaces, Arkiv f. Math. 14 (1976), pp. 233-244.

H. P. Rosenthal

[9] The Banach spaces $C(K)$ and $L^p(\mu)$, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), pp. 763-781.

[10] On a theorem of J. L. Krivine concerning local finite representability of l^p in general Banach spaces, J. Functional Analysis 28 (1978), pp. 197-225.

[11] A characterization of Banach spaces containing l^1, Proc. Nat. Acad. USA 71 (1974), pp. 2411-2413.

[12] Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), pp. 803-831.

G. Schechtman

[1] Examples of L_p spaces ($1 < p \neq 2 < \infty$), Israel J. Math. 19 (1974), pp. 220-224.

[2] On Pelczyńyski's paper "Universal bases", ibid. 22 (1975), pp. 181-184.

R. Schneider

[1] Equivariant endomorphisms of the space of convex bodies, Trans. Amer. Math. Soc. 194 (1974), pp. 53-78.

C. P. Stegall

[1] Banach spaces whose duals contain $l^1(\Gamma)$ with applications to the study of dual

$L_1(\mu)$ spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1976), pp. 463-477.

[2] The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces, ibid. 206 (1975), pp. 213-223.

A. Szankowski

[2] Subspaces without the approximation property, Israel J. Math. 30 (1978), pp. 123-129.

[3] A Banach lattice without the approximation property, ibid. 24 (1976), pp. 329-337.

[4] $B(H)$ does not have the approximation property, to appear.

M. Talagrand

[1] Espaces de Banach Faiblement K-analytiques, Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach, Exposés XII-XIII, École Polytechnique, Palaiseau 1977-1978.

H. Toruńczyk

[6] Characterizing a Hilbert space topology, preprint 143, Institute of Math. Polish Acad. Sci.

W. A. Veech

[1] Short proof of Sobczyk's theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), pp. 627-628.

J. Wolfe

[1] Injective Banach spaces of type $C(T)$, Israel J. Math. 18 (1974), pp. 133-140.

M. Zippin

[3] The separable extension problem, Israel J. Math. 26 (1977), pp. 372-387

(O-4227.0101)

数学名著译丛

拓扑空间论
代数特征值问题
数学概观
常微分方程
数学与猜想
代数几何
数学——它的内容，方法和意义
非线性与泛函分析
微积分和数学分析引论
代数数理论讲义
非线性及泛函分析——数学分析中的非线性问题讲义
数学的发现——对解题的理解、研究和讲授
代数拓扑基础
博大精深的素数
环与模范畴
代数几何引论
代数学 I
代数学 II
控制论（或关于在动物和机器中控制和通信的科学）（第二版）
微分几何基础（第一卷）
一般拓扑学
能量分析攻击
线性算子理论

www.sciencep.com


ISBN 978-7-03-030596-1

科学出版中心 数理分社
电话：(010) 64033664
E-mail：math-phy@mail.sciencep.com
销售分类建议：高等数学

定 价：68.00 元